

UNIVERSITE DE PARIS SUD - CENTRE D'ORSAY

**THESE DE DOCTORAT D'ETAT
ES SCIENCES PHYSIQUES**

présentée par
Jacques SOLOMON

pour obtenir le grade
de DOCTEUR es Sciences Physiques

**INJECTIONS DE PARTICULES ENERGETIQUES
DANS LA MAGNETOSPHERE**
**CONSEQUENCES SUR LES DEFORMATIONS
DES FONCTIONS DE DISTRIBUTION**
ET SUR LES INTERACTIONS DE GYRORESONANCE

Soutenue le 18 janvier 1977 devant la Commission d'Examen

MM. J.L. DELCROIX Président
J. BAUCHE
R. GENDRIN
R. PELLAT Rapporteur
D.J. SOUTHWOOD

Remercements

Monsieur le Professeur Delcroix a accepté de présider mon jury de Thèse, je l'en remercie vivement.

Je suis particulièrement reconnaissant à Monsieur le Professeur Bauche d'avoir déployé de grands efforts pour participer à ce jury.

Je suis également reconnaissant au Dr. D.J. Southwood de l'Imperial College de Londres, pour l'intérêt qu'il a manifesté pour mon travail.

Que Messieurs Hiéblot et Petit, Directeurs du Centre de Recherches en Physique de l'Environnement Terrestre et Planétaire, et Monsieur Revah, Directeur du Département ETE du Centre National d'Etudes des Télécommunications, qui m'ont accueilli dans leur laboratoire et soutenu dans mes recherches, trouvent ici l'expression de ma gratitude.

Je suis profondément reconnaissant à Monsieur R. Gendrin, qui m'a initié à la Géophysique Externe, de m'avoir guidé avec patience, et encouragé, tout au long de ce travail de thèse.

Je suis particulièrement redevable à Monsieur R. Pellar de l'aide précieuse qu'il m'a toujours apportée sur le plan théorique.

Une reconnaissance particulière va à mes collègues et amis avec lesquels j'ai eu l'occasion de travailler, ou qui m'ont aidé de leurs conseils : M. Ashour-Abdalla, N. Cornilleau-Wehrlin, J. Etcheto, S. Perraut, A. Roux, V. Jentsch, et à tous les membres de l'équipe "Interactions Ondes-Particules".

Je tiens également à remercier N. Dupin et M. Le Floch pour l'aide précieuse qu'elles m'ont apportée pour la réalisation de cet ouvrage.

S O M M A I R E

CHAPITRE I - INTRODUCTION

CHAPITRE II - LES INTERACTIONS DE GYRORESONANCE DANS UN PLASMA A
DEUX COMPOSANTES THERMIQUES

- II.1. Ondes naturelles EBF et UBF et interactions (e-R)
et (i-L).
- II.2. Discussion sommaire d'une relation de dispersion
complète.
- II.3. Rôle du plasma froid pour l'amplification des ondes.

CHAPITRE III - APPLICATION DE LA THEORIE QUASI-LINEAIRE AUX INTERACTIONS
DE GYRORESONANCE DANS LA MAGNETOSPHERE. RELAXATION.
EQUILIBRE.

- III.1. Situation du problème. Equation de diffusion quasi-linéaire en angle d'attaque et équation des ondes.
- III.2. Expression du champ des ondes comme fonction des
particules en interaction.
- III.3. Relaxation en milieu infini. Problème du milieu fini.
- III.4. Cas stationnaire
 - III.4.a. But et principe des calculs
 - III.4.b. Principaux résultats des calculs
 - III.4.c. Confirmations expérimentales récentes de la théorie
- III.5. Rôle de la dérive azimutale et de la convection des
particules chaudes.

CHAPITRE IV - DERIVE AZIMUTALE ET CONVECTION DES PARTICULES CHAUDES SOUS
L'ACTION DES CHAMPS MAGNETIQUE ET ELECTRIQUE STATIQUES.
CONSEQUENCES SUR LES INTERACTIONS ENTRE ONDES ET PARTICULES.

- IV.A. Dérive azimutale pure des particules chaudes.

CHAPITRE I - INTRODUCTION

Le travail présenté ici concerne les mouvements de convection des particules ionisées énergétiques dans la proche magnétosphère terrestre (distances géocentriques de l'ordre de 2 à 10 rayons terrestres) et les interactions entre ces particules et les ondes qu'elles peuvent engendrer. Les figures 1 et 2 permettent de se faire une idée de l'aspect de la magnétosphère terrestre (figure 1 : d'après Heikkila, 1973; figure 2 : d'après Ness, 1969).

De nombreuses mesures obtenues à l'aide de satellites ont montré qu'il existe, dans les régions qui nous intéressent, des populations de plasma "froid" et de plasma "chaud", essentiellement composées de protons et d'électrons, quoique d'autres ions, He^+ et O^+ notamment, puissent aussi se manifester (Chappel, 1972; West, 1975). La répartition en densité de ces populations varie dans l'espace et dans le temps. La séparation en deux populations, "froide" et "chaude", recouvrant deux gammes d'énergie E_0 et E_1 différentes ($E_0 \leq 1$ eV; E_1 de 1 à 100 keV et au-delà) s'explique par le fait que ces populations ont des origines et sont soumises à des processus différents. Les particules froides viennent essentiellement de l'ionosphère par ascension le long des lignes de force du champ magnétique statique \vec{B}_0 , alors que les particules chaudes proviennent de la magnéto-sphère lointaine lors de phénomènes d'injection ou d'accélération prenant principalement effet au niveau de la queue de la magnétosphère.

Les particules chaudes effectuent les mouvements périodiques classiques de rotation cyclotronique autour des lignes de force de \vec{B}_0 , d'oscillation d'un point miroir à l'autre le long de celles-ci, et enfin de dérive azimutale perpendiculairement à \vec{B}_0 (figure 3, d'après Hess, 1968). A ces trois mouvements sont associées trois échelles de temps différentes et trois invariants adiabatiques. Nous faisons usage des deux premiers invariants lors de l'étude des mouvements de convection de ces particules chaudes.

Des enregistrements au sol ou à l'aide de satellites indiquent aussi la présence dans la magnétosphère de nombreuses ondes naturelles. Leur spectre en fréquence est très étendu puisqu'il va des pulsations extrêmement lentes

de fréquence $f < 0.01$ Hz (Pc5) jusqu'à des fréquences $f > 10$ kHz (souffle TBF), et même au-delà (radiation kilométrique). Il faut, en plus, distinguer parmi ces ondes celles qui sont électromagnétiques de celles qui sont électrostatiques. Les mécanismes d'émission de ces ondes, et les effets de ces ondes sur les particules, sont très variés (Fredricks, 1975; Barfield, 1975; Gendrin, 1975). Nous nous intéresserons, dans ce travail, à des ondes électromagnétiques cyclotroniques ioniques ($f \sim 1$ Hz) ou électroniques ($f \sim 1$ kHz) qui jouent un rôle important dans la proche magnétosphère par leurs effets sur les protons et les électrons, dont l'énergie moyenne est de quelques dizaines de keV.

Nous indiquons maintenant, plus spécifiquement, ce que nous étudions dans les différents chapitres.

Dans le chapitre II, nous rappelons rapidement un certain nombre de notions concernant les interactions cyclotroniques entre ondes et particules. Nous donnons un exemple de relation de dispersion concernant ces interactions et nous indiquons les approximations qu'il est possible de faire pour la simplifier. Nous insistons sur le rôle joué par le rapport des densités de plasma froid et chaud dans le coefficient d'amplification des ondes.

Dans le chapitre III, nous étudions l'amplification des ondes et la diffusion des particules. La présence de particules chaudes présentant une anisotropie de température ($T_{\perp} > T_{\parallel}$, où les indices \perp et \parallel se réfèrent à la direction du champ magnétique statique \vec{B}_0) permet l'amplification des ondes cyclotroniques électroniques ou ioniques. Ces ondes peuvent se propager le long des lignes de force de \vec{B}_0 et être éventuellement observées au sol. Les ondes engendrées agissent à leur tour sur les particules, et par diffusion dans l'espace des vitesses, tendent à réduire le déséquilibre thermodynamique ($T_{\perp} \rightarrow T_{\parallel}$). Les particules diffusées voient donc leur vitesse parallèle à \vec{B}_0 s'accroître (car leur énergie totale est pratiquement conservée dans ce processus de diffusion), et elles sont perdues en bout de ligne de force par collision avec des particules de l'atmosphère.

Nous essayons de traiter le problème de l'interaction des ondes et des particules d'une manière auto-consistante, c'est-à-dire de calculer

simultanément l'intensité spectrale des ondes émises et la fonction de distribution des particules résultant de la diffusion de celles-ci par les ondes. Nous examinons successivement le cas d'une interaction non-stationnaire (relaxation) et d'une interaction stationnaire. Ce n'est que dans ce dernier cas que nous effectuons des calculs complets. Les formules obtenues relient l'intensité des ondes émises, ou la fonction de distribution, à certains paramètres mesurables du plasma : densité, vitesse thermique, anisotropie de température, etc... Elles permettent donc des comparaisons avec des données d'ondes et de particules.

Dans le chapitre IV, nous prenons en compte les mouvements de dérives radiale et azimutale des particules chaudes sous l'influence des champs magnétique et électrique statiques. C'est ce que nous appellerons convection des particules au sens large. Nous pourrons alors étudier, en utilisant le théorème de Liouville, la déformation des fonctions de distribution des particules soumises à ces champs statiques et par conséquent, des coefficients d'amplification des ondes calculés à partir de ces fonctions de distribution, dans l'espace et/ou dans le temps. Ceci nous permet de relier entre elles différentes parties de l'espace et donc d'avoir une vue plus globale de la dynamique des interactions entre ondes et particules.

Nous considérons d'abord le cas d'une dérive azimutale pure, due uniquement au champ magnétique statique. Nous introduisons ensuite un champ électrique statique, mais nous effectuons dans ce cas les calculs avec une hypothèse de stationnarité par rapport au temps. Nous comparons nos calculs sur les déformations des fonctions de distribution et sur les changements en fréquence des coefficients d'amplification des ondes à des mesures obtenues à l'aide de satellites ou au sol.

Dans la conclusion de ce travail, nous indiquons un certain nombre d'extensions possibles de nos calculs et, d'une manière plus générale, des interactions entre ondes et particules.

Nous donnons en annexe un certain nombre d'articles sur lesquels s'appuie ce travail. Ces articles sont notés dans le cours du texte sous la forme : réf. I, réf. II, etc... (cf. Bibliographie 1., page 73)

CHAPITRE II - LES INTERACTIONS DE GYRORESONANCE

DANS UN PLASMA A DEUX COMPOSANTES THERMIQUES.

II.1. Ondes naturelles EBF et UBF et interactions (e-R) et (i-L).

Dans l'introduction, nous avons indiqué qu'il existe dans la magnétosphère terrestre de nombreuses émissions naturelles d'ondes électromagnétiques. Parmi celles-ci, un certain nombre d'émissions du type EBF ($f \sim 500$ Hz) ou UBF ($f \sim 1$ Hz) peuvent s'identifier à des ondes cyclotroniques transverses électroniques ou ioniques respectivement. Pour les ondes électroniques, le domaine de pulsations ω concerné est tel que

$$(II,1) \quad \omega_{ci} \ll \omega < \omega_{ce}$$

où ω_{ce} et ω_{ci} sont les pulsations cyclotroniques électroniques et ioniques respectivement ($\omega_{ce} = qB_0/m_e$; $\omega_{ci} = qB_0/m_i$ où q est la valeur absolue de la charge électronique, m_e et m_i les masses de l'électron et du proton respectivement). Pour les ondes ioniques, nous avons :

$$(II,2) \quad \omega < \omega_{ci}$$

Ces ondes, et leurs différents modes de propagation, ont été étudiées, par exemple, par Stix (1962).

Les ondes cyclotroniques électroniques, polarisées à droite, interagissent principalement avec les électrons (interaction e-R). Les ondes cyclotroniques ioniques, polarisées à gauche, interagissent avec les protons (interactions i-L). Pour des raisons que nous développons par la suite, nous ne nous intéressons qu'à des ondes se propageant parallèlement à \vec{B}_0 . Le principe de ces interactions est alors simple. Les particules, qui tournent autour de \vec{B}_0 à la fréquence cyclotronique et qui se déplacent le long des lignes de force de \vec{B}_0 ,

avec une vitesse v_{\parallel} , voient, par effet Doppler, le champ électrique de l'onde de pulsation ω , de nombre d'onde k , tourner aussi à la fréquence cyclotronique. On obtient ainsi les relations dites de résonance :

$$(II,3) \quad \begin{aligned} \omega_{ce} &= \omega - kv_{\parallel} & (e-R) \\ \omega_{ci} &= \omega - kv_{\parallel} & (i-L) \end{aligned}$$

Il s'agit donc, d'après les domaines de pulsation des ondes (II,1) et (II,2) d'interactions pour lesquelles les ondes et les particules "voyagent" en sens contraires (si la vitesse de phase $v_{\phi} = \omega/k > 0$, alors $v_{\parallel} < 0$ pour une orientation définie par rapport à \vec{B}_0). Les relations (II,3) permettent de définir une vitesse résonante des particules $v_{\parallel} = V_r$.

Comme nous l'avons écrit ci-dessus, nous supposons dans toute la suite de ce travail que les ondes se propagent parallèlement aux lignes de force du champ magnétique terrestre \vec{B}_0 . Cette hypothèse est justifiée pour deux raisons. Du point de vue expérimental, il est vrai qu'il existe dans la magnétosphère des gradients de densité du plasma froid perpendiculaires à \vec{B}_0 (fibres d'ionisation) qui guident les ondes, ce qui leur permet éventuellement d'atteindre le sol. Du point de vue théorique, les interactions les plus intenses sont pratiquement obtenues pour une propagation parallèle à \vec{B}_0 (Brinca, 1972), mais on ne peut alors tenir compte des effets des ondes sur les particules de haute énergie (Lyons et al., 1972). Cependant les résultats obtenus grâce à cette hypothèse simplificatrice, sont qualitativement satisfaisants (une discussion plus détaillée est donnée dans la réf. III). Des résultats expérimentaux concernant les ondes, que nous discutons par la suite, justifient aussi cette hypothèse (chap. III).

Une analyse de Fourier, sous la forme $\exp i(kz - \omega t)$, de l'équation de Boltzman-Vlasov et des équations de Maxwell, conduit aux relations de dispersion (z est la coordonnée suivant \vec{B}_0 , l'origine étant le point équatorial de la ligne de force considérée). Suivant Kennel et Petschek (1966), les relations de dispersion des ondes cyclotroniques électroniques (R) et ioniques (L) peuvent s'écrire respectivement :

$$(II,4) \quad \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \left\{ \begin{array}{l} R \\ L \end{array} \right\} = 1 - \pi \sum_{i,e} \frac{(\omega_{pi,e})^2}{\omega} \times \int_0^\infty v_\perp^2 dv_\perp \int_{-\infty}^{+\infty} dv_{||} \left[\frac{\partial F_{i,e}}{\partial v_\perp} - \frac{k}{\omega} (v_{||} \frac{\partial F_{i,e}}{\partial v_\perp} - v_\perp \frac{\partial F_{i,e}}{\partial v_{||}}) \right] \times \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{kv_{||} - \omega - \omega_{ci,e}} \\ \frac{1}{kv_{||} - \omega + \omega_{ci,e}} \end{array} \right\}$$

F_{ie} est la fonction de distribution des ions (respectivement des électrons) normalisée à 1. $\omega_{pi,e}$ est la fréquence plasma des ions, respectivement des électrons ($\omega_{pi,e}^2 = n_{i,e} q^2 / \epsilon_0 m_{i,e}$, $n_{i,e}$ étant la densité de l'espèce de particules considérée). c est la vitesse de propagation de la lumière dans le vide. Nous supposerons toujours par la suite la neutralité électrique réalisée ($n_i = n_e$). Si la densité n_i des protons ou des électrons chauds est faible devant celle du plasma froid n_0 , on peut négliger les effets de température pour la propagation des ondes (partie réelle de la relation de dispersion), et prendre $F_{i,e}$ sous la forme :

$$(II,5) \quad F_{i,e} = \frac{1}{2\pi v_\perp} \delta(v_\perp) \delta(v_{||})$$

où δ est la distribution de Dirac. On obtient alors, dans les domaines de fréquences considérées, les relations de dispersion "plasma froid" :

$$(II,6) \quad \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \approx \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega_{ce} - \omega)} \quad (\text{mode R})$$

$$(II,7) \quad \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \approx \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}(\omega_{ci} - \omega)} \quad (\text{mode L})$$

A ces relations de dispersion correspondent, d'après (II,3) les vitesses résonantes :

$$(II,8) \quad |V_{re}| = v_{Ae} \frac{(1-x)^{3/2}}{x^{1/2}} \quad (R)$$

$$(II,9) \quad |V_{ri}| = v_{Ai} \frac{(1-x)^{3/2}}{x} \quad (L)$$

où $v_{Ae,i} = C \frac{\omega_{ce,i}}{\omega_{pe,i}}$ est la vitesse d'Alfvén des électrons ou des ions respectivement, et où $x = \omega/\omega_{ce,i}$ est la fréquence réduite pour le mode (R) ou le mode (L) respectivement.

Soit $f_{i,e}$ la partie chaude de la fonction de distribution des ions ou des électrons normalisée à n_1/n_0 , que l'on exprimera en fonction des coordonnées cylindriques (v_1, v_2) ou sphériques (α, v) indifféremment (v est la vitesse totale des particules, α l'angle d'attaque que fait cette vitesse totale avec \vec{B}_0 ; $v_1 = v \sin\alpha$, $v_2 = v \cos\alpha$). La partie imaginaire de (II,4), qui apparaît à travers les dénominateurs résonants, permet de calculer le coefficient d'amplification γ des ondes (γ est la partie imaginaire de ω ; $\gamma > 0$ correspond à une amplification). Sous la même hypothèse $n_1/n_0 \ll 1$ que celle du paragraphe précédent, et suivant Kennel et Petschek (1966), on peut écrire γ ($\gamma \ll \omega$) sous la forme :

$$(II,10) \quad \gamma_{eR} = \pi \omega_{ce} (1-x)^2 n(V_{re}) \cdot \left\{ A(V_{re}) - \frac{x}{1-x} \right\}$$

$$(II,11) \quad \gamma_{iL} = \frac{\pi \omega_{ci}}{2} \frac{(1-x)^2}{x(1-x/2)} n(V_{ri}) \cdot \left\{ A(V_{ri}) - \frac{x}{1-x} \right\}$$

avec pour $n(V_r)$, densité relative des particules résonantes :

$$(II,12) \quad n(v_r) = 2\pi |v_r| \int_0^\infty v_\perp dv_\perp f(v_\perp, v_\parallel = v_r)$$

$$= 2\pi |v_r|^3 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha} f(\alpha, v_r) d\alpha$$

et pour $A(v_r)$, anisotropie de température :

$$(II,13) \quad A(v_r) = \frac{\int_0^\infty v_\perp dv_\perp (v_\parallel \frac{\partial f}{\partial v_\perp} - v_\perp \frac{\partial f}{\partial v_\parallel}) \frac{v_\perp}{v_\parallel}}{2 \int_0^\infty v_\perp dv_\perp f(v_\perp, v_\parallel)}$$

$v_\parallel = v_r$

$$= \frac{\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)_v d\alpha}{2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha} f(\alpha, v_r) d\alpha}$$

$v_\parallel = v_r$

Dans ces formules, f est, suivant le cas, la fonction de distribution chaude des électrons ou celle des ions. Notons aussi que toutes les intégrations doivent être effectuées avec $v_\parallel = v_r$.

Nous rencontrerons des cas pour lesquels l'hypothèse $n_1/n_0 \ll 1$ n'est plus vérifiée. Nous étudions donc ce problème dans le paragraphe suivant en

spécifiant explicitement la fonction de distribution des particules chaudes (les résultats qui suivent constituent la première partie de la réf. IV).

II.2. Discussion sommaire d'une relation de dispersion complète.

Nous choisissons comme fonction de distribution pour les particules chaudes :

$$(II,14) \quad f_{e,i}(v_{\perp}, v_{\parallel}) = \frac{n_1/n_o}{\pi^{3/2} v_o^3} \frac{1}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{v_{\perp}}{v_o}\right)^{2m} \exp - \frac{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2}{v_o^2}$$

avec $m \geq 0$. Par définition, les énergies moyennes perpendiculaires et parallèles, pour les ions de masse m_i par exemple, s'écrivent :

$$(II,15) \quad \begin{aligned} E_{\perp} &= \frac{1}{2} m_i \langle v_{\perp}^2 \rangle = kT_{\perp} \\ E_{\parallel} &= \frac{1}{2} m_i \langle v_{\parallel}^2 \rangle = \frac{1}{2} kT_{\parallel} \end{aligned}$$

où K est la constante de Boltzman.

Nous obtenons, d'après (II, 14) :

$$(II,16) \quad \begin{aligned} \langle v_{\perp}^2 \rangle &= (m+1)v_o^2 \\ \langle v_{\parallel}^2 \rangle &= \frac{1}{2} v_o^2 \end{aligned}$$

D'après (II,13), nous trouvons pour l'anisotropie A, en tenant compte aussi de (II,15) et (II,16) :

$$(II,17) \quad A = m = \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} - 1$$

m est donc simplement l'anisotropie de température des particules, et la vitesse caractéristique v_o est reliée aux vitesses quadratiques moyennes par les relations (II,16).

Les mesures in situ des populations de particules d'énergie moyenne (quelques dizaines de KeV) indiquent que la fonction de distribution donnée par (II,14) peut être une représentation analytique acceptable pour cette population. D'autre part, les calculs qui suivent dépendent assez peu de la représentation choisie si elle est proche de (II,14) (voir discussion in fine).

Nous écrivons la relation de dispersion dans le cas des interactions (i-L). Le cas des interactions (e-R) serait tout à fait semblable. Portant dans (II,4) une fonction de distribution qui est la somme de (II,5) (plasma froid) et de (II,14), nous obtenons, après quelques calculs, pour la relation de dispersion $D(\omega, k) = 0$:

$$(II.18) \quad D(\omega, k) = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci} (\omega_{ci} - \omega)} \cdot \left\{ 1 + \frac{n_1}{n_o + n_1} \frac{\omega_{ci} (\omega_{ci} - \omega)}{\omega^2} \left[1 + \frac{v_{ri}}{v_o} z \left(\frac{v_{ri}}{v_o} \right) \right] \left(m - \frac{\omega}{\omega - \omega_{ci}} \right) \right\}$$

Dans cette expression, ω , donc v_{ri} , est a priori complexe et on pose $\omega = \omega_r + i\gamma$ (toutefois on omet l'indice r lorsqu'il n'y a pas de confusion possible). Z , fonction de Fried et Conte (1961) est définie par l'expression suivante :

$$(II.19) \quad Z(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-v^2)}{v - z} dv$$

dans laquelle $z = a + ib$ est un nombre complexe. Pour les propriétés de cette fonction on peut, par exemple, consulter Stix (1962). Il faut faire deux remarques concernant la formule (II.18) :

1/ Les électrons n'apparaissent pas explicitement dans cette expression. Ils assurent seulement la neutralité du plasma. Ceci vient du fait que seuls les électrons relativistes, d'importance relative faible, peuvent interagir avec le mode ionique.

2/ Dans (II,18), ω_{pi} est calculée avec la densité totale $n_0 + n_1$ et non pas avec la densité du plasma froid seulement.

Une étude de cette relation de dispersion (Cornwall et Schulz, 1971; 1973) permet de comprendre les approximations que l'on peut faire. Il est clair d'abord que nous retrouvons la relation de dispersion plasma froid si $n_1/n_0 \ll 1$. Nous séparons les parties réelle et imaginaire de $D(\omega, k)$:

$$D(\omega, k) = \operatorname{Re} D(\omega, k) + i\operatorname{Im} D(\omega, k)$$

ce qui donne pour le coefficient d'amplification des ondes par un développement de Taylor ($\gamma \ll \omega_r$) :

$$(II.20) \quad \gamma = (-\operatorname{Im} D(\omega_r, k)) / \frac{\partial \operatorname{Re} D(\omega_r, k)}{\partial \omega}$$

On peut montrer que γ est positif (amplification) lorsque :

$$(III.21) \quad m - \frac{\omega}{\omega_{ci} - \omega} > 0$$

(Rappelons, en passant, que $m > 0$, c'est-à-dire d'après (II,17) $T_\perp > T_\parallel$; c'est là l'origine de l'instabilité). D'après (III.21) il y a donc instabilité pour des fréquences réduites $x = \omega/\omega_{ci}$ telles que

$$(III.22) \quad 0 < x < x_c = \frac{m}{m+1}$$

où x_c est la fréquence réduite critique. Or les valeurs expérimentales de l'anisotropie dans la magnétosphère sont telles que $m \lesssim 1$, ce qui conduit à :

$$x < x_c \lesssim 0.5$$

c'est-à-dire que seules les fréquences basses sont amplifiées. D'autre part l'expression de la vitesse résonante (II,9), calculée avec la densité totale $n_o + n_1$, reste approximativement valable. La densité n_1 étant fixée, d'après (II,9) pour diminuer v_{ri} il faut augmenter x (mais x doit rester inférieur à x_c) ou augmenter n_o ($v_A^2 \propto 1/(n_o + n_1)$), mais on revient alors au cas $n_1/n_o \ll 1$. Compte tenu de ces limitations et des ordres de grandeur des différents paramètres dans la magnétosphère, nous avons pratiquement toujours

$$(II,23) \quad v_{ri}/v_o \gtrsim 1$$

et nous pouvons alors utiliser l'approximation suivante de la fonction Z :

$$(II,24) \quad Z(z) \approx i\sqrt{\pi} e^{-a^2} - \frac{1}{a}$$

où a est la partie réelle de z . La partie réelle de $D(\omega, k)$ redonne alors la relation de dispersion du plasma froid (II,7), mais calculée avec la densité totale $n_o + n_1$. A partir de (II.18), (II,20) et (II,24), nous obtenons pour le coefficient d'amplification γ :

$$(II.25) \quad \gamma/\omega_{ci} \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{n_1}{n_o + n_1} \cdot \frac{v_r^2}{v_o^2} \cdot \frac{v_o}{v_{Ai}}$$

$$\cdot \left[\exp\left(-\frac{v_r^2}{v_o^2}\right) \right] \left(m - \frac{x}{1-x} \right)$$

Nous pourrions d'ailleurs obtenir cette expression à partir de (II.11) à condition de calculer toutes les quantités qui contiennent la densité avec $n_o + n_1$.

Le maximum de $\gamma(x)$ est obtenu pour une fréquence x_o vérifiant l'équation suivante (Gendrin et al. 1971) :

$$(II,26) \quad v_r^2/v_o^2 \approx 1 + \frac{x_o}{2(1-x_o)} \quad \frac{1}{m - \frac{x_o}{1-x_o}}$$

Nous allons, dans le dernier paragraphe de ce chapitre, étudier le rôle du plasma froid pour l'amplification des ondes.

III.3. Rôle du plasma froid pour l'amplification des ondes

Nous écrivons (II,26) sous la forme :

$$(II,27) \quad v_r^2/v_o^2 = 1 + \epsilon$$

Compte tenu des ordres de grandeurs habituels de m et x_o dans la magnétosphère ($m \sim 1$, $x_o \sim 0.1$ à 0.3), on a $\epsilon \ll 1$ et nous trouvons au 2ème ordre pris en ϵ pour le coefficient d'amplification maximum (par rapport à x) γ :

$$(II,28) \quad \gamma_o/\omega_{ci} \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2e} \frac{n_1}{n_o + n_1} \frac{v_o}{v_{Ai}} \left(m - \frac{x_o}{1-x_o} \right)$$

D'autre part, tenant compte de (II,9) et (II,27), avec $\epsilon \ll 1$ et $x_o \ll 1$, nous pouvons écrire :

$$(II,29) \quad \frac{x_o}{1-x_o} \approx v_{Ai}/v_o$$

Nous obtenons donc pour γ_o :

$$(II,30) \quad \gamma_o/\omega_{ci} \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2e} \frac{n_1}{n_o + n_1} \frac{v_o}{v_{Ai}} \left(m - \frac{v_{Ai}}{v_o} \right)$$

Il est alors intéressant de voir pour quelle valeur de n_o , toutes choses étant égales par ailleurs, γ_o est maximum (c'est en somme le maximum maximorum de γ). Comme $V_{Ai}^2 \propto 1/(n_o + n_1)$, nous trouvons facilement que le maximum maximorum de γ , γ_{om} est obtenu pour

$$(II,31) \quad V_{Ai} / V_o \approx m/2$$

Introduisons le paramètre $\beta_{||}$:

$$(II,32) \quad \beta_{||} = \frac{n_1 K T_{||}}{B_o^2 / 2\mu_o} = \frac{n_1 m_1 (V_o^2 / 2)}{B_o^2 / 2\mu_o}$$

rapport de la pression parallèle du plasma à la pression magnétique (μ_o est la perméabilité du vide). Nous pouvons mettre (II,31) (compte tenu de $V_{Ai} = \omega_{ci}/\omega_{pi}$) sous la forme :

$$(II,33) \quad \frac{n_o + n_1}{n_1} \approx \left(\frac{2}{m}\right)^2 \left(\frac{1}{\beta_{||}}\right)$$

Reportant aussi (II,31) dans (II,29), nous obtenons

$$(II,34) \quad x_{om} \approx \frac{m}{m+2}$$

qui est la fréquence correspondant à ce maximum maximorum de γ .

Nous voyons donc qu'il existe une valeur optimale de la densité du plasma froid pour laquelle on obtiendra la valeur γ_{om} de γ . Ceci souligne le rôle important que peut jouer une augmentation de la densité du plasma froid, qui se produit lorsque les particules chaudes venant de la queue de la magnétosphère pénètrent dans la plasmasphère ou dans les régions de plasma détaché.

Ajoutons, pour finir, que les calculs précédents sont confirmés par des calculs semblables (effectués avec des fonctions de distribution bimaxwelliennes)

soit purement numériques (Perraut et Roux, 1975), soit analytiques et numériques (Cuperman et al., 1975). En particulier on peut vérifier, d'après les calculs numériques que les formules (II,33) et (II,34), quoiqu'obtenues ici par des calculs assez simples, sont bien vérifiées. Des calculs semblables ont aussi été faits pour les interactions (e-R) (Cuperman et Landau, 1974).

Après ces rappels sur les interactions de gyrorésonance et cette étude du coefficient d'amplification linéaire des ondes, nous passons, dans le chapitre suivant, à l'étude de la phase quasi-linéaire de ces interactions.

Chapitre III - APPLICATION DE LA THEORIE QUASI-LINEAIRE
AUX INTERACTIONS DE GYRORESONANCE DANS LA MAGNETOSPHERE.
RELAXATION - EQUILIBRE

III.1 - SITUATION DU PROBLEME - EQUATION DE DIFFUSION
QUASI-LINEAIRE EN ANGLE D'ATTAQUE ET EQUATION
DES ONDES.

Nous avons vu, dans le chapitre II, qu'en présence d'une anisotropie de température de la population électronique ou ionique, les ondes électromagnétiques cyclotroniques correspondantes pouvaient être amplifiées. Dans la phase linéaire, si B est le champ magnétique de l'onde considérée, nous avons :

$$B^2 \propto e^{2\gamma t}$$

où γ est le coefficient d'amplification des ondes donné par (II,10) ou (II, 11) ; B et γ sont fonctions de la fréquence. L'onde, croissant exponentiellement, agit rapidement sur les particules (en un temps $t \sim 1/\gamma$), qui diffusent alors dans l'espace des vitesses de façon à réduire l'anisotropie de température. La fonction de distribution des vitesses évoluant, le coefficient d'amplification varie et l'on sort de la phase linéaire des phénomènes.

Les ondes naturelles auxquelles nous nous intéressons dans ce travail, présentent des spectres en fréquence suffisamment "larges" ($\Delta\omega/\omega \sim 1$; $\Delta\omega$ largeur du

spectre à mi-hauteur en fréquence centrale) pour que nous puissions étudier la phase non linéaire des phénomènes grâce à la théorie quasi-linéaire. Dans la référence I, nous étudions en détail les aspects de cette théorie en ce qui concerne la magnétosphère : partant de l'équation de Boltzman-Vlasov, qui s'applique au plasma magnétosphérique non collisionnel, nous établissons une équation de diffusion quasi-linéaire et nous indiquons le domaine de validité de celle-ci. Nous n'insisterons pas ici sur cet aspect des calculs. Ceux-ci sont grandement simplifiés grâce à un résultat obtenu dans le chapitre II : les valeurs possibles de l'anisotropie de température sont telles que les fréquences réduites x des ondes amplifiées vérifient en général :

$$x \ll 1$$

d'après (II,22). La diffusion dans l'espace des vitesses se réduit dans ce cas à une diffusion en angle d'attaque α , la diffusion en énergie v devenant négligeable (cf. discussion dans la réf. I).

Nous écrivons donc une équation de diffusion quasi-linéaire en angle d'attaque :

$$(III,1) \frac{\partial f}{\partial t} - \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = \pi \frac{q^2}{m_{e,i}^2} \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$\cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\sin \alpha}{|V_r - V_g|} + B^2 k \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right\} + S(\alpha, v) - P(\alpha, v)$$

Dans cette équation \vec{r} est le rayon vecteur dans l'espace et le terme $\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}$ un terme d'inhomogénéité

qui disparaît dans les calculs effectués dans ce chapitre parce que nous effectuons une moyenne sur l'espace. Cependant un terme de ce type apparaît lorsque l'on considère la convection ou la dérive des particules (chap. IV). v_g est la vitesse de groupe des ondes ; B_k^2 est l'intensité spectrale des ondes par unité de nombre d'onde ; nous utiliserons aussi $B_f^2 = (2\pi/v_g) B_k^2$, intensité spectrale des ondes par unité de fréquence. $S(\alpha, v)$ est une source permanente de particules dont nous préciserons la forme ultérieurement. $P(\alpha, v)$ est un terme de perte des particules chaudes : celles-ci "tombent" dans le cône de perte après diffusion en angle d'attaque ou bien sont perdues par échange de charge avec des particules neutres et froides.

A l'équation de diffusion en angle d'attaque (III,1) nous adjoignons l'équation de conservation de l'énergie des ondes :

$$(III,2) \quad \frac{\partial w_k}{\partial t} + \vec{v} \cdot (\vec{v}_g w_k) = 2\gamma_k w_k$$

$$\text{avec } w_k = \frac{B_k^2}{2\mu_0} - \frac{2v_p}{v_g}$$

où μ_0 est la perméabilité du vide et v_p la vitesse de phase des ondes. En pratique comme nous considérons uniquement la propagation des ondes suivant la direction z , parallèle à \vec{B}_0 , et le milieu homogène dans cette direction, nous avons simplement :

$$(III,3) \quad \frac{\partial B_k^2}{\partial t} + v_g \frac{\partial B_k^2}{\partial z} = 2\gamma_k B_k^2$$

Nous allons, dans ce chapitre, à partir des équations (III-1) et (III-3), étudier différents cas possibles d'interactions entre ondes et particules. Le modèle physique servant de base à ces calculs est le suivant. Nous considérons une "région d'interaction" alignée le long d'une ligne de force donnée, symétrique par rapport à l'équateur, et dont nous précisons les dimensions ci-dessous. Les ondes se propageant parallèlement à \vec{B}_0 sont partiellement réfléchies en bout de ligne de force et effectuent des aller et retour dans cette région. Elles interagissent avec les particules chaudes qui effectuent aussi des oscillations le long de cette ligne de force (fig.3). Cette interaction a lieu sur une distance L que nous appelons "longueur d'interaction". Une définition cohérente de celle-ci n'est possible que si l'on résout le problème de l'interaction en milieu inhomogène, mais nous pouvons cependant estimer L d'après le calcul du coefficient d'amplification linéaire des ondes en milieu homogène (cf. discussion dans la réf. III). Les particules peuvent être perdues en bout de ligne de force, comme nous l'avons dit précédemment, parce que, par exemple, elles sont entrées par diffusion dans le cône de perte. De plus les particules chaudes peuvent traverser, transversalement à \vec{B}_0 , la région d'interaction, par diffusion radiale, dérive ou convection. Nous reviendrons sur ce problème dans le chapitre IV, mais il est évident dès à présent que cette dérive transversale des particules peut imposer une limitation à la durée de l'interaction, dépendant évidemment des dimensions transversales de la "région d'interaction".

Avant d'examiner différents cas d'interaction nous allons, dans le paragraphe suivant, intégrer l'équation (III,3) sur le champ des ondes.

III.2 - EXPRESSION DU CHAMP DES ONDES COMME FONCTION DES PARTICULES EN INTERACTION

Nous remplaçons l'équation (III,3) sur les ondes par une équation "moyennée" sur z :

$$(III,4) \quad \frac{\partial \langle B^2_k \rangle}{\partial t} + \frac{V}{L} g(R) \langle B^2_k \rangle = 2 \gamma_k \langle B^2_k \rangle$$

$$\text{avec } \langle B^2_k \rangle = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{+L/2} B^2_k(z) dz$$

dans laquelle R est le coefficient de réflexion en énergie des ondes en bout de ligne de force et g(R) une fonction simple représentant l'effet de R sur la densité d'énergie des ondes présente dans la région d'interaction (g(R) $\sim 1 - R$). γ_k est le coefficient d'amplification des ondes à l'équateur de la ligne de force considérée. Comme nous l'avons dit dans le paragraphe précédent, seul un traitement complet du problème inhomogène en z permettrait de justifier strictement une équation du type (III,4), mais l'écriture de celle-ci est cependant physiquement claire dans notre cas.

Par une méthode d'intégration, semblable à celle utilisée dans les réf. II et III, nous pouvons faire apparaître dans l'équation de diffusion (III,1) le produit $\gamma_k B^2_k$, que nous remplaçons alors par le premier membre de (III,4). Nous obtenons ainsi une équation différentielle du 1er ordre en B^2_k qu'il est facile d'intégrer. Les calculs sont détaillés dans l'annexe 2. Ils conduisent à

l'expression suivante du champ des ondes par unité de fréquence, dans le cas des interactions e-R (mais l'expression obtenue dans le cas des interactions i-L n'en diffère que par les coefficients) :

$$(III,5) \quad \langle B_f^2(t) \rangle = \langle B_f^2(t=0) \rangle e^{-\frac{V_g}{\lambda} g(R) t}$$

$$+ 4 \pi^2 \frac{m^2 e}{q^2} \omega_{ce} \frac{|v_r - v_g|}{V_g} |v_r^3| (1-x)^2$$

$$\int_0^t \left[1 - \frac{x}{A(1-x)} \right] e^{-\frac{V_g}{\lambda} g(R)(t'-t)} \left\{ \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \alpha}{\cos^4 \alpha} d\alpha \right.$$

$$\left. ; v_r = c^{te} \right.$$

$$\int_{\alpha}^{\pi/2} \left[S(\alpha', v) - P(\alpha', v) - \left(\frac{\partial f}{\partial t}(\alpha', v) + v \cdot \frac{\partial f}{\partial r}(\alpha', v) \right) \sin \alpha' d\alpha' \right] dt'$$

Les notations indiciaires, $v = c^{te}$ et $v_r = c^{te}$ indiquent qu'il faut intégrer successivement en gardant v constant puis $v_r = v \cos \alpha$ constant. $B_f^2(t=0)$ est la valeur initiale du champ des ondes. Remarquons que l'anisotropie A est incluse dans l'intégration temporelle car elle peut dépendre du temps.

Pour former un système d'évolution complet il faut évidemment adjoindre à cette expression l'équation de diffusion (III,1).

Dans toute la suite de ce chapitre nous ne considérons que des quantités (source, fonction de distribution, etc ...) moyennées sur l'espace (nous reviendrons sur ce point dans le chapitre IV). Nous avons donc en particulier $\frac{\partial f}{\partial r} = 0$ dans les expressions précédentes.

Nous allons maintenant aborder le cas de la relaxation d'une fonction de distribution en l'absence de source de particules.

III.3 - RELAXATION EN MILIEU INFINI. PROBLEME DU MILIEU FINI

Nous supposons, dans ce paragraphe, que nous n'avons pas de source ($S = 0$) ni de pertes ($P = 0$), mais simplement une fonction de distribution initiale anisotrope qui relaxe vers une fonction de distribution isotrope par diffusion des particules en angle d'attaque sous l'effet des ondes amplifiées.

La résolution complète de ce problème est difficile car il faut traiter simultanément les équations couplées (III-1) et (III-5) si l'on veut connaître la distribution des particules et le champ des ondes à chaque instant. Un certain nombre d'études (en grande partie numériques) de ce problème ont été effectuées, essentiellement pour des plasmas de laboratoire (Davidson et Ogden, 1975).

L'intérêt de ce problème pour la magnétosphère, qui reste encore à développer, réside dans ce qu'il doit permettre d'évaluer l'importance des effets transitoires lors de changements importants des conditions physiques du milieu : injection de plasma froid, par exemple. Nous y reviendrons lors de la discussion du cas stationnaire.

Nous rappelons ici brièvement certains aspects simplifiés de ce problème, qui ont été développés dans la réf. II, et qui peuvent servir de point de départ à une étude plus approfondie. Nous écrivons donc d'après (III,5) avec les hypothèses faites au début de ce paragraphe et en négligeant le champ initial des ondes supposé faible devant le champ émis après amplification :

$$(III,6) \quad B_f^2(t) = 4 \pi^2 \frac{m^2 e}{q^2} \omega_{ce} \frac{|v_r - v_g|}{v_g} \left| v_r^3 \right| \left\{ (1-x)^2 \int_0^t \left[1 - \frac{x}{A(1-x)} \right] e^{\frac{v_g}{q} g(R)(t' - t)} \right. \\ \left. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \alpha}{\cos^4 \alpha} d\alpha \int_{\alpha}^{\pi/2} \left(-\frac{\partial f}{\partial t} \right) \sin \alpha' d\alpha' \right\} dt'$$

Nous pouvons d'abord supposer un milieu "infini" ($\mathcal{L} \rightarrow \infty$) ou, du moins, tel que le temps de transit des ondes :

$$(III,7) \quad \Theta \approx \mathcal{L}/v_g$$

soit grand devant les autres temps caractéristiques du problème, c'est-à-dire essentiellement le temps de relaxation $\tau_{D\alpha}$, temps au bout duquel la fonction de distribution est

devenue quasi-isotope en α . Nous intéressant alors à des fréquences faibles devant la fréquence de coupure

($\frac{x}{A(1-x)} \ll 1$), nous obtenons d'après (III,6) :

$$(III,8) \quad B_f^2 \approx 4 \pi^2 \frac{m^2 e}{q^2} \omega_{ce} \frac{|v_r - v_g|}{v_g}$$

$$|v_r^3| (1-x)^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \alpha}{\cos^4 \alpha} d\alpha \int_{\alpha}^{\pi/2} [f(\alpha', v, t=0) \\ - f(\alpha', v, t=\tau_{D\alpha})] \sin \alpha' d\alpha'$$

Si, par exemple, nous choisissons la fonction de distribution initiale de la réf. II :

$$(III,9) \quad f(t=0) = \frac{n_1}{n_0} \frac{1}{\pi^{3/2} v_0^3} K_m \exp \left(-\frac{v^2}{v_0^2}\right) \sin^m \alpha$$

où v_0 est une vitesse caractéristique des particules chaudes, K_m un coefficient, donné dans la réf. II, tel que f soit normalisée à n_1/n_0 et où $m > 0$ caractérise l'anisotropie initiale de f , nous obtenons :

$$(III,10) \quad f(t=\tau_{D\alpha}) \approx \frac{n_1}{n_0} \frac{1}{\pi^{3/2} v_0^3} \exp \left(-\frac{v^2}{v_0^2}\right)$$

c'est-à-dire une fonction de distribution entièrement isotrope.

Il est alors facile de calculer explicitement B_f^2 ($t = \tau_{D\alpha}$).

Mais cette formule simple (III,8) appelle deux remarques critiques.

- 1) L'anisotropie A dépend du temps et par conséquent le terme $[1 - x/A(1 - x)]$ que nous négligeons dans (III,6) peut avoir un effet sur le champ des ondes.
- 2) Si nous calculons l'ordre de grandeur de $\theta = \mathcal{L}/V_g$ et de $\tau_{D\alpha}$ (en utilisant pour ce dernier temps caractéristique l'équation de diffusion) dans les conditions magnétosphériques nous trouvons (pour le détail des calculs voir la réf. II) :

$$\theta \sim 1 \text{ s.}$$

$$\tau_{D\alpha} \sim 10 \text{ à } 100 \text{ s.}$$

Nous voyons donc qu'il faut en général tenir compte des pertes d'énergie des ondes en bout de ligne de force, c'est-à-dire qu'il faut traiter le problème en milieu fini et résoudre l'équation de convolution (III,6).

Nous n'insisterons pas davantage ici sur ce problème qui fait d'ailleurs l'objet actuellement d'une étude plus approfondie (réf. VI). Nous nous servirons simplement des notions introduites ci-dessus lors de la discussion du cas stationnaire, qu'il est possible de traiter d'une manière beaucoup plus complète.

III.4 - CAS STATIONNAIRE

III.4.a - But et principe des calculs

Nous supposons une source permanente de particules S, indépendante du temps. Cette source est définie par le nombre de particules chaudes dn_2/dt introduites par unité de volume d'interaction. La fonction de distribution de ces particules peut prendre différentes formes. Nous introduisons des pertes de particules P, et d'énergie des ondes dues à une réflexion imparfaite. Nous supposons alors que s'établit un régime stationnaire du système ondes particules pour lequel :

$$\frac{\partial B^2}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial f(\alpha, v)}{\partial t} = 0$$

où f est la fonction de distribution des particules existant dans le milieu (qu'il ne faut pas confondre avec la fonction de distribution des particules injectées).

Nous nous intéressons ici, comme dans la réf.III, au cas d'une interaction entre des électrons chauds ($E_0 \sim 40$ kev) et des ondes cyclotroniques électroniques dans le but d'expliquer les émissions du type souffle à large bande dans la gamme EBF (fréquences ~ 100 Hz à 1000 Hz).

Une première étude de ce cas stationnaire est due à Kennel et Petschek (1966). Cependant dans leurs calculs, ces auteurs se sont fixés a priori le spectre des ondes,

s'interdisant par là une étude auto-consistante du problème ; en revanche, les calculs que nous avons effectués dans la réf. III ne comportent pas cette restriction.

L'équation (III,3) de conservation de l'énergie des ondes (avec $\frac{\partial B^2}{\partial t} = 0$) conduit à $g(R) = \log \frac{1}{R}$. Nous pouvons ensuite intégrer (III,5) par rapport au temps, et par des temps supérieurs au temps de transit des ondes et au temps d'établissement de l'équilibre, nous obtenons pour le champ stationnaire :

$$(III,11) \quad \langle B^2_f \rangle \approx \frac{4\pi^2 m^2 e}{q^2} \frac{\mathcal{L}}{v_g \log \frac{1}{R}} \omega_{ce} \frac{|v_r - v_g|}{v_g}$$

$$|v_r^3| (1-x)^2 \left[1 - \frac{x}{A(1-x)} \right]$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin \alpha}{\cos^4 \alpha} d\alpha \int_\alpha^{\pi/2} [S(\alpha', v) - P(\alpha', v)] \sin \alpha' d\alpha'$$

sous les mêmes hypothèses, l'équation de diffusion (III,1) moyennée sur z s'écrit :

$$(III,12) \quad o = \frac{1}{2} \frac{q^2}{m^2 e} \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$\cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \sin \alpha \frac{v_g}{|v_r - v_g|} \langle B^2_f \rangle \frac{\partial f}{\partial \alpha} + S(\alpha, v) - P(\alpha, v)$$

Pour intégrer cette équation nous supposons que $P = 0$ à l'extérieur du cône de perte ($\alpha > \alpha_0$) (*). Nous trouvons alors pour la fonction de distribution à l'équilibre :

$$(III,13) \quad f(\alpha, v) = f(\alpha_0, v)$$

$$+ \frac{2m_e^2}{q^2} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{|V_r - V_g|}{\langle B_f^2 \rangle V_g \sin \alpha'} d\alpha' \int_{\alpha'}^{\pi/2} S(\alpha'', v) \sin \alpha'' d\alpha''$$

A l'intérieur du cône de perte, suivant Kennel et Petschek (1966), nous supposons que S est négligeable et que les particules qui entrent dans le cône de perte par diffusion, sont perdues en un temps $T_e \approx T_B/4$, où T_B est la période d'aller-retour des particules entre deux points miroirs. Ceci nous conduit à choisir :

$$(III,14) \quad P(\alpha, v) \approx f(\alpha, v) / T_e$$

$f(\alpha, v)$ étant la fonction de distribution à l'équilibre. Nous obtenons alors pour $\alpha < \alpha_0 \ll 1$:

$$(III,15) \quad \frac{1}{2} \frac{q^2}{m_e^2} \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha \frac{V_g}{|V_r - V_g|} \langle B_f^2 \rangle \frac{\partial f}{\partial \alpha} - f / T_e = 0$$

(*) Ceci suppose que le seul terme de perte des particules est dû aux collisions à basse altitude ($\lesssim 100$ km), au niveau des points miroirs, avec les particules de l'atmosphère. On néglige en particulier, dans le cas des interactions i-L, les phénomènes d'échange de charge qui sont vraisemblablement importants (Liemohn, 1961 ; Smith et al., 1976) et dont les conséquences du point de vue des interactions entre ondes et particules ne sont pas alors négligeables (Gregory, 1971 ; Cornwall, 1977).

qui se ramène à une équation de Bessel dont la solution est :

$$(III,16) \quad f(\alpha, v) = X(v) I_0(\alpha/\sqrt{DT_e})$$

où I_0 est la fonction de Bessel modifiée de 1ère espèce et où $D = (q^2 \langle B_f^2 \rangle V_g) / 2m^2 |V_r - V_g|$ est le coefficient de diffusion des ondes.

Les conditions de continuité au bord du cône de perte ($\alpha = \alpha_0$) de $f(\alpha, v)$ et $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, v)$ permettent de déterminer $X(v)$ et $f(\alpha_0, v)$.

Si nous spécifions la source S nous pouvons alors obtenir grâce aux formules (III,11), (III,13) et (III,16) le champ stationnaire des ondes et la fonction de distribution des particules à l'équilibre.

Dans la réf. III, nous avons choisi une source de la forme :

$$(III,17) \quad S(\alpha, v) = \frac{K_p}{\pi^{3/2} v_o^3} \left(\frac{1}{n_o} \frac{dn_2}{dt} \right) \sin^p \alpha \exp\left(-\frac{v^2}{v_o^2}\right)$$

où K_p est un coefficient tel que la source, intégrée sur l'espace des vitesses, soit normalisée à $\frac{1}{n_o} \frac{dn_2}{dt}$. Cette forme est semblable à celle des fonctions de distribution que l'on peut observer dans la magnétosphère (cf. Chap.II), mais nous introduisons en plus une échelle de temps (car S est homogène à f/t) à travers le terme $\frac{dn_2}{dt}$, qui traduit d'une manière phénoménologique l'intensité de la source. Nous reviendrons sur ce point lors de la discussion critique concernant, en particulier, le cas stationnaire (paragraphe III.5).

Nous allons maintenant donner les principaux résultats obtenus dans la réf.III, avec le choix de (III,17) pour $S(\alpha, v)$.

III.4.b - Principaux résultats des calculs

A partir de (III,11) nous obtenons une expression pour le spectre des ondes émises $\langle B_f^2 \rangle$, dont nous donnons un exemple sur la figure 4. Des expressions analytiques simples (équations 12, 13, 14 de la réf.III) permettent d'obtenir la forme du spectre des ondes, la fréquence pour laquelle la puissance des ondes est maximale et la valeur de cette puissance, tout ceci en fonction des paramètres caractéristiques de la source (E_0 , $\frac{dn}{dt}$) et du plasma ambiant (n_0 , B_0). En adoptant un certain modèle de variation de E_0 et B_0 avec la distance géocentrique on obtient la formule simple suivante :

$$(III,18) \quad \langle B_{f\max}^2 \rangle = k n_0 L^{5.5} \frac{dn_2}{dt}$$

où k est un coefficient numérique $\sim 8 \times 10^{-13}$ lorsque n_0 et n_2 sont exprimés en m^{-3} et $\langle B_f^2 \rangle$ en $(pT)^2 \text{ Hz}^{-1}$.

La dépendance de $\langle B_{f\max}^2 \rangle$ en fonction des différents paramètres, de n_0 en particulier, a fait l'objet d'études expérimentales récentes dont nous discuterons les résultats un peu plus loin.

Puis nous calculons, connaissant $\langle B_f^2 \rangle$, la fonction de distribution à l'équilibre d'après (III,13) et (III,16). Nous représentons, sur la figure 5, cette fonction

de distribution en fonction de l'angle d'attaque et pour différentes valeurs du terme $\frac{dn}{dt}^2$ d'intensité de la source.

Sur cette figure il est facile de saisir certains résultats caractéristiques des calculs. Lorsque l'intensité de la source est "faible" il y a peu de particules dans le cône de perte et la fonction de distribution est anisotrope.

Mais à mesure que $\frac{dn}{dt}^2$ croît l'intensité des ondes augmente, donc la diffusion devient plus intense, et le cône de perte se remplit. La fonction de distribution tend à devenir isotrope. Nous passons ainsi du régime de diffusion faible caractérisé par une fonction de distribution anisotrope dans le cône de perte, au régime de diffusion forte caractérisé au contraire par une fonction de distribution quasi-isotrope à l'intérieur du cône de perte. Un tel phénomène est effectivement constaté expérimentalement. En période d'agitation magnétosphérique (flux élevé des particules piégées, émissions électromagnétiques intenses), la distribution est quasi-isotrope à l'intérieur du cône de perte. L'explication physique en est simple. Comme nous avons imposé un état stationnaire, l'amplification des ondes dans la région d'interaction doit compenser exactement les pertes d'énergie des ondes, dues à une réflexion imparfaite. Le coefficient d'amplification est donc déterminé par l'équation de conservation des ondes et on trouve d'après

(III,4) $\gamma = \frac{1}{2} \frac{V_g}{\Sigma} g(R)$. D'autre part l'expression générale de γ peut s'écrire d'après (II,10) sous la forme $\gamma = \eta \times A$ où η est le pourcentage de particules résonantes et A l'anisotropie. Si le nombre de particules résonantes fourni par la source est "faible" η est "petit" et A doit être "grand" ce qui se traduit par une fonction de distribution stationnaire anisotrope. Nous obtenons évidemment l'effet inverse

si $\frac{dn_2}{dt}$ augmente car n a tendance à augmenter et la fonction de distribution tend à devenir isotrope.

Un autre aspect de ce même processus peut se comprendre d'après la figure 6, sur laquelle nous représentons le flux omnidirectionnel piégé ($\alpha > \alpha_o$) des particules chaudes, calculé à partir de (III,13), en fonction de l'intensité de la source. Tant que la source n'est pas trop intense il suffit d'augmenter le flux précipité ($\alpha < \alpha_o$) pour compenser toute augmentation de l'intensité de la source et nous obtenons des états d'équilibres qui se caractérisent par un flux piégé identique (zone de diffusion faible). Ceci correspond à la (pseudo)-limite du flux piégé introduite par Kennel et Petscheck (1966). Mais au delà d'une certaine intensité de la source le cône de perte se remplit (voir figure 5) et à chaque valeur de $\frac{dn}{dt}^2$ correspond un état d'équilibre avec une valeur différente du flux piégé (zone de diffusion forte), ce qui se traduit sur la figure 6 par la partie montante de courbe de flux. Les résultats expérimentaux portés sur la même figure (O'Brien, 1964 ; Hess, 1968) confirment nos calculs théoriques.

A partir du rapport entre le flux piégé et le flux précipité, nous pouvons calculer le temps de vie des particules T_L , qui représente le temps moyen qu'une particule d'énergie donnée met pour être diffusée dans le cône de perte ... et perdue. Pour $L = 4$, par exemple, nous obtenons (T_L en secondes) :

$$(III,19) \quad T_L \approx \frac{2 T_e}{\alpha_o^2} \left\{ 1 + \frac{3.6 \times 10^2}{\frac{dn_2}{dt}} \frac{v_o}{v} \exp\left(\frac{v}{v_o}\right)^2 \right\}$$

Nous représentons sur la figure 7 ce temps de vie en fonction de l'énergie des particules, et pour différentes intensités de la source. Il apparaît clairement d'après (III,19), et sur la figure 7, que T_L décroît lorsque $\frac{dn_2}{dt}$ croît et qu'il tend alors vers un "temps de vie minimum".

$$(III,20) \quad T_{Lmin} \approx \frac{2 T_e}{\alpha_o^2}$$

Le temps de vie donne aussi l'ordre de grandeur du temps nécessaire pour atteindre l'équilibre stationnaire. Nous comparons, sur la figure 7, ce temps à un temps caractéristique de dérive des particules ($\tau_D/20$) à travers la zone d'interaction (que nous limitons arbitrairement à $\sim 18^\circ$ d'extension en longitude). Nous constatons que si l'intensité de la source devient trop faible les particules résonantes ne peuvent atteindre un équilibre de diffusion stationnaire dans le temps qu'elles mettent à dériver à travers la zone d'interaction. Ceci pose le problème de l'estimation des effets transitoires.

Un autre résultat important des calculs est que le flux piégé stationnaire ne dépend pas de la densité de plasma froid n_o . L'idée selon laquelle une injection de plasma froid aurait des effets importants sur le flux piégé et la précipitation des particules (Brice, 1970, 1971), idée qui avait été contestée dès l'origine par Gendrin (1971, 1972), ne peut donc s'appliquer éventuellement qu'au cas des phénomènes transitoires. Il importe donc d'estimer les effets correspondants (cf. III.3 et réf.VI).

Une étude phénoménologique ultérieure de l'interaction entre ondes et particules (Schulz, 1974) a fourni des résultats semblables à ceux que nous avons exposés ci-dessus, en particulier pour la variation du flux piégé en fonction de l'intensité de la source. Parce qu'elle est purement phénoménologique une telle étude ne permet cependant pas d'obtenir des formules aussi détaillées que celles que nous avons obtenues, en particulier pour l'énergie spectrale des ondes ou pour la fonction de distribution des particules à l'équilibre.

III.4.c - Confirmations expérimentales récentes de la théorie.

Des résultats de mesures obtenues avant 1973 à bord de satellites ou de fusées sont discutés dans la réf. III. Ces mesures sont en général en bon accord avec nos calculs. Nous insisterons ici sur des comparaisons avec des mesures plus récentes portant sur la dépendance du champ des ondes en fonction des paramètres du plasma magnétosphérique.

Chan et Holzer (1976), Holzer et al (1976) ont obtenu à bord du satellite OGO 5 des mesures simultanées au voisinage du plan équatorial et pour des distances géocentriques telles que $3.5 < L < 6$, de la densité de plasma froid n_0 , du flux des particules chaudes, et de l'énergie spectrale des ondes amplifiées par ces particules. Holzer et al (1976) peuvent ainsi tester la relation (III,18). Ils supposent pour cela que le terme de source $\frac{dn}{dt}$ est approximativement indépendant de L , les mesures étant faites durant une période de temps uniformément calme. Un exemple

des résultats qu'ils obtiennent est illustré par la figure 8. Nous voyons, sur cette figure, que les changements de sens de variation du champ des ondes en fonction de L sont assez bien rendus par notre expression théorique (III,18).

Un autre point intéressant, mais plus difficile à interpréter, des résultats de Holzer et al (1976) est le suivant. Ces auteurs trouvent empiriquement une autre expression possible pour représenter les variations de B_f^2 en fonction de L, n_o et j, flux des particules résonantes :

$$(III,21) \quad B_f^2 \propto n_o j^2$$

Les résultats obtenus par (III,21) sont assez semblables à ceux de la figure 8. D'un point de vue théorique leur explication fait référence à nos calculs sur le flux des particules piégées. Celui-ci peut s'écrire (réf.III) sous la forme :

$$(III,22) \quad j = j_1 + j_2$$

j_1 est le flux "limite" indépendant de la source et qui donne la partie horizontale de la courbe de la figure 6 ; j_2 un flux qui dépend de l'intensité de la source :

$$(III,23) \quad j_2 = \kappa \left(\frac{dn}{dt} \right)^p$$

où $p = 1/2$ en diffusion faible et $p = 1$ en diffusion forte ; κ est une fonction de L. j_2 donne, en diffusion forte essentiellement, la partie montante de la courbe de la figure 6. Comme les mesures donnent un flux j des particules résonantes de plusieurs ordres de grandeurs en dessous du flux "limite"

j_1 , Holzer et al écrivent en diffusion faible (source faible) :

$$(III,24) \quad \left(\frac{dn_2}{dt} \right)^{1/2} \approx j/\kappa$$

ce qui leur permet de trouver à partir de (III,18) la formule :

$$B_f^2 \propto n_0 j^2 L^{-1/2}$$

voisine de (III,21). Une telle justification théorique est cependant peu claire, mais nous suggérons, d'après les indications que donnent les calculs de la réf.VI concernant les effets transitoires, une explication. La source étant faible durant les mesures, l'équilibre stationnaire n'est pas atteint (cf. discussion sur le temps de vie dans III.4.b). Dans ce cas le terme j_1 de (III,22) (qui ne dépend pas de la source), dépend du temps et est fortement diminué par rapport à sa valeur limite stationnaire. Au contraire le terme j_2 dépend de la source et pas du temps (comme la source) ; la formule (III,21) en découle.

Holzer et al (1976) discutent aussi les hypothèses de base de nos calculs, c'est-à-dire :

- 1) propagation des ondes parallèlement à \vec{B}_0 ;
- 2) étant stationnaire.

Ils concluent que les ondes se propagent à peu près parallèlement à \vec{B}_0 dans la région d'interaction (qui est voisine du plan équatorial) à cause des forts gradients transverses du plasma froid et que, d'autre part, le coefficient R doit être pris au sens large pour tenir compte des différentes possibilités de perte et de réflexion des ondes.

Ils estiment aussi que, quoique l'équilibre stationnaire ne soit pas forcément atteint parce que la source est faible les résultats n'en semblent pas affectés. Ceci ressort aussi, d'un point de vue théorique, du problème des effets transitoires : nous pouvons dire, sommairement, que le champ des ondes dépend lentement du temps mais que sa dépendance vis-à-vis des paramètres magnétosphériques reste semblable à celle du cas stationnaire.

Nous allons, dans le dernier paragraphe de ce chapitre, discuter certains aspects des calculs précédents, aspects qui justifient quelque peu les études du chapitre IV.

III.5 - ROLE DE LA DERIVE AZIMUTALE ET DE LA CONVECTION DES PARTICULES CHAUDES.

Nous avons introduit dans le cas stationnaire un terme d'intensité de source $\frac{dn}{dt}^2$. Nous avons vu aussi que le temps caractéristique nécessaire pour atteindre un équilibre stationnaire dépend de $\frac{dn}{dt}^2$, et doit être comparé à un temps caractéristique de dérive des particules à travers la région d'interaction. On conçoit donc, que plutôt que d'introduire phénoménologiquement une source de particules et une échelle de temps pour la dérive des particules, il faille normalement traiter le problème de l'interaction entre ondes et particules chaudes dans la magnétosphère, en tenant compte des mouvements de dérive de ces dernières dans les calculs. Ceci implique en particulier la conservation du terme d'inhomogénéité $\frac{\partial f}{\partial r}$ (dans certaines directions de l'espace) dans l'équation (III,1).

Les mouvements de dérive des particules ont des causes variées. Ils peuvent être dus à des champs électrostatiques ou électromagnétiques de basse fréquence qui entraînent une diffusion radiale des particules. Dans ce cas il faut adjoindre à l'équation de diffusion en angle d'attaque une équation de diffusion radiale en L (Falthammar, 1968 ; Roederer, 1970 ; Cornwall^{*}, 1975). Mais les effets principaux pour les particules que nous considérons ($E \sim 10 - 100$ kev) sont dus aux champs statiques électrique et magnétique. Le champ électrique statique de convection qui s'établit lors des sous-orages magnétosphériques a pour conséquence une pénétration radiale des particules à partir de la queue de la magnétosphère, tandis que le champ magnétique \vec{B}_0 impose une dérive azimutale simultanée (fig.9). Nous allons, dans le chapitre suivant, étudier les effets de ces mouvements des particules sur les fonctions de distribution et sur les interactions ondes-particules.

* Il est intéressant d'analyser rapidement le travail de Cornwall (1975), qui est une tentative pour coupler la diffusion radiale des particules (qui joue le rôle de la source S) à leur diffusion en angle d'attaque. Le traitement de ce problème est réalisé, sans supposer un état stationnaire, par une méthode semi-phénoménologique. Cornwall part des équations de diffusion et de conservation des ondes du type (III,1) et (III,4), en incluant dans (III,1) un terme de diffusion radial et un terme de perte par échange de charge (voir note du paragraphe III-4-a). Puis il prend les moments $\langle N \rangle$, $\langle NE \rangle$, $\langle NE_{\perp} \rangle$ de la fonction de distribution des particules; N est la densité des particules énergétiques, E et E_{\perp} les énergies totale et perpendiculaire à \vec{B}_0 . Il obtient trois équations d'évolution pour ces moments grâce à l'équation de diffusion. Il fait ensuite un certain nombre d'hypothèses, pour fermer ce système d'équations, qu'il serait trop long de discuter ici. Cornwall arrive en particulier au résultat suivant : il existe une valeur critique β_c du paramètre de pression β du plasma chaud (voir formule II,32) en-dessous de laquelle il ne peut y avoir d'ondes amplifiées et de pertes de particules par diffusion en angle d'attaque. L'équilibre dynamique de la population de particules est alors uniquement déterminé par la diffusion radiale et le processus d'échange de charge. L'existence de β_c est équivalente à l'existence d'un flux critique des particules présentes dans le milieu, en-dessous duquel il n'y a pas d'interactions ondes-particules. Pour des valeurs de β et A voisines de l'unité, ce flux critique est inférieur mais proche de la valeur limite obtenue par notre calcul stationnaire. Par contre, pour d'autres valeurs de ces paramètres, le flux critique peut être notablement inférieur au flux stationnaire. Ce calcul de flux critique doit être relié au problème de l'énergie et de l'anisotropie fournies par la source de particules, et au problème des effets transitoires.

CHAPITRE IV - DERIVE AZIMUTALE ET CONVECTION DES PARTICULES CHAUDES
SOUIS L'ACTION DES CHAMPS MAGNETIQUE ET ELECTRIQUE STATIQUES. CONSEQUENCES
SUR LES INTERACTIONS ENTRE ONDES ET PARTICULES.

Nous allons, dans ce chapitre, étudier certains aspects de la dérive azimutale et de la convection des particules énergétiques dans la proche magnétosphère, et les effets qui peuvent en résulter sur les interactions entre ondes et particules.

Pour alléger la rédaction, nous désignerons par convection (au sens large) tous les mouvements des particules, y compris la dérive azimutale quoique, strictement parlant, la convection ne concerne que les effets des champs électriques statiques (ou "lentement" variables dans le temps) sur les particules.

Le difficile problème de la convection des particules est encore loin actuellement d'être résolu globalement, car sa solution exige, entre autres, l'établissement de modèles de champs magnétique et électrique à trois dimensions, l'évaluation de l'importance des variations dans le temps de ces champs et aussi de l'importance des liaisons ionosphère-magnétosphère. On peut cependant, moyennant un certain nombre d'hypothèses simplificatrices, en étudier relativement aisément certains aspects (Atkinson, 1972; Pellat et Laval, 1972; Vasiliunas, 1972, 1975).

Nous supposons que nous pouvons découpler les deux aspects : convection et interactions entre ondes et particules. En toute rigueur cela n'est pas vrai, mais il y a cependant des régions où l'on peut supposer que la diffusion due aux interactions que nous avons étudiées précédemment est négligeable, par exemple lorsque la densité du plasma froid est "trop faible" (cf. Chap. II). Nous pouvons donc considérer que les particules chaudes venant de la queue de la magnétosphère, pénètrent par convection dans la proche magnétosphère et que, rencontrant alors des régions de plasma froid relativement dense, comme le bord externe de la plasmapause, elles interagissent avec les ondes. Nous déduisons

de ces études des mouvements macroscopiques des particules chaudes certaines conséquences pour les interactions ondes-particules, simplement en calculant les fonctions de distribution et les coefficients d'amplification des ondes comme fonction de l'espace et/ou du temps.

Nous étudions d'abord le cas de la dérive azimutale pure des particules en fonction de l'espace et du temps en l'absence de champ électrique (Chap. IV-A) ; puis le cas de la dérive radiale et azimutale en présence de champ électrique mais avec une hypothèse de stationnarité par rapport au temps (Chap. IV-B). Tous les calculs qui suivent sont faits en considérant des protons et des ondes cyclotroniques ioniques, mais il est évident que nous pourrions développer des calculs semblables pour des électrons et des ondes cyclotroniques électriques.

IV-A Dérive azimutale pure des particules chaudes (réf. IV) et (réf. V).

IV - A - 1 Position du problème

Nous considérons des protons qui dérivent azimutalement, la distance géocentrique de la trace de leur mouvement dans le plan équatorial restant constante ($L = c^{\text{te}}$). Dans un champ magnétique axisymétrique, ces protons restent donc sur une coquille magnétique déterminée. Cette dérive est due au gradient et à la courbure du champ magnétique \vec{B}_0 . Les calculs qui suivent sont valables en l'absence de champ électrique, ou lorsque l'énergie cinétique des particules considérées est suffisamment grande pour que la dérive azimutale due au champ magnétique (qui dépend de l'énergie des particules comme on le verra plus loin) domine complètement la dérive azimutale et radiale due au champ électrique (qui ne dépend pas de l'énergie des particules). Dans ce cas, la fonction de distribution des particules est solution d'une équation du type (III,1), dans laquelle nous négligons la diffusion et les sources de particules mais conservons le terme d'inhomogénéité dû à la dérive azimutale :

$$(IV-A,1) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\phi}_D \frac{\partial f}{\partial \phi} = 0$$

L'angle ϕ est la longitude comptée positivement vers l'ouest à partir du minuit local, puisque nous nous intéressons dans ce chapitre à des protons

chauds qui dérivent vers l'ouest (cf. fig. 3 et 9). ϕ_D est la vitesse angulaire de dérive dans le plan équatorial, moyennée sur un aller-retour des particules le long de la ligne de force de \vec{B}_o .

Nous supposons que se produit à un instant initial $t = 0$ une injection instantanée de particules centrée en $\phi = 0$, de largeur caractéristique $\Delta\phi$ et sur une coquille magnétique L donnée (figure 9). Nous choisissons la fonction de distribution initiale des protons chauds sous la forme :

$$(VI - A,2) \quad f(v, \alpha, \phi, t = 0) = (n_1^0/n_0)$$

$$b(v/v_o)^{2m} \left[\exp - (v/v_o)^2 \right] \sin^{2m} \alpha \left[\exp - (\phi/\Delta\phi)^2 \right]$$

f est normalisée à (n_1^0/n_0) , ce qui donne

$$b = \left[1/\pi^{3/2} \quad v_o^3 \quad \Gamma(m+1) \right]$$

n_1^0 est la densité initiale des protons chauds pour $\phi = 0$ et n_0 la densité du plasma froid. Nous supposons par la suite que le champ magnétique \vec{B}_o est dipolaire. Dans ce cas, la vitesse de dérive peut se mettre sous la forme (Hamlin et al., 1961) :

$$(VI - A,3) \quad \phi_D = a v^2 (c_1 + c_2 \sin \alpha)$$

$$\text{avec } a = (3/2) (m_i/q B_o r_o^2)$$

$$r_o = L R_e$$

$$c_1 = 0.7 \quad c_2 = 0.3$$

R_e , rayon terrestre (≈ 6.370 km); B_o , champ magnétique équatorial à la distance $r = r_o$; B_o , mesuré en gammes ($1\gamma = 10^{-9}$ Tesla) s'exprime par :

$$B_o = 31.1 \times 10^3 \times \left(\frac{1}{L} \right)^3$$

D'après (IV - A,1), nous avons pour tout $t > 0$:

$$(IV - A,4) \quad f(v, \alpha, \phi, t) = (n_1^0 / n_0) b (v/v_0)^{2m} \sin^{2m}\alpha \exp[-(v/v_0)^2] \\ \exp\left\{-\left[\phi - av^2 t (c_1 + c_2 \sin\alpha)\right]^2 / (\Delta\phi)^2\right\}$$

Nous allons calculer certains moments de cette fonction de distribution (densité, vitesse thermique), puis la relation de dispersion des ondes cyclotroniques ioniques.

IV - A - 2 - Calcul de la densité et de la vitesse thermique

Pour la densité, nous avons par définition :

$$(IV-A,5) \quad n_1(\phi, t) = 4\pi n_0 \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty f(v, \alpha, \phi, t) v^2 \sin\alpha dv d\alpha$$

Nous donnons en annexe (A2) le calcul détaillé de cette expression ainsi que celle de la vitesse thermique. Nous nous contenterons ici de donner le résultat du calcul dans un cas simple. Nous considérons le cas des temps "longs", qui est le plus intéressant, pour lequel

$$(IV - A,6) \quad av_0^2 t \sim \phi > \Delta\phi$$

ce qui correspond à la sortie de la largeur initiale d'injection pour les particules de vitesse caractéristique v_0 . Nous prenons de plus $m = 1$. Nous obtenons alors, compte tenu des valeurs numériques de c_1 et c_2 :

$$(IV - A,7) \quad n_1(\phi, t) \approx (4/3)n_1^0 (\Delta\phi/\phi) \\ (\phi/0.85 av_0^2 t)^{5/2} \exp[-(\phi/0.85 av_0^2 t)]$$

Le maximum de cette expression pour une longitude ϕ fixée est obtenu pour un temps t tel que :

$$(IV - A,8) \quad \phi \approx 0.85 \cdot (5/2) av_0^2 t$$

et ce maximum vaut :

$$(IV - A,9) \quad n_1 \approx (\Delta\phi/\phi) n_1^0$$

Pour la vitesse thermique, nous avons par définition :

$$(IV - A,10) \quad \langle v^2 \rangle (\phi, t) = [4\pi / n_1 (\phi, t)] \cdot \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} f(v, \alpha, \phi, t) v^4 \sin\alpha dv d\alpha$$

Pour $t = 0$, nous obtenons facilement :

$$(IV - A,11) \quad \langle v^2 \rangle (\phi, t = 0) = (m + \frac{3}{2}) v_0^2$$

et dans le cas des temps "longs" :

$$(IV - A,12) \quad \langle v^2 \rangle (\phi, t) \approx v_0^2 (\phi / av_0^2 t)$$

quelle que soit la valeur de m .

Cette dernière formule s'interprète aisément. A une longitude ϕ donnée, nous voyons d'abord passer, après l'injection, les particules de haute énergie qui dérivent le plus rapidement d'après (IV - A,3), puis des particules d'énergie décroissante.

Nous avons représenté les variations de la densité $n_1(\phi, t)$ et de la vitesse thermique $\langle v^2 \rangle (\phi, t)$ sur la figure 10, pour des valeurs habituelles des paramètres initiaux dans la magnétosphère.

IV - A - 3-Coefficient d'amplification des ondes pour des interactions ioniques cyclotroniques (i-L)

L'étude d'une relation de dispersion complète, dans le chapitre II, a montré que l'amplification des ondes est produite par des protons pour lesquels $V_r/v_o \geq 1$ et à la condition que la densité du plasma froid ne soit pas trop "faible". La fonction de distribution (IV - A,4) n'a pas la forme analytique simple de la fonction (II,14), par exemple; cependant les conditions ci-dessus sont peu sensibles à la forme exacte de la fonction de distribution, comme nous l'avons souligné dans le chapitre II. Nous utilisons donc, pour la partie réelle de la relation de dispersion, la formule (II,7), et comme coefficient d'amplification celui donné par (II,11). Toutes les quantités sont calculées avec la densité totale $n_o + n_1$.

Nous commençons par donner l'expression de l'anisotropie A en partant de la formule (II,13). L'expression exacte de A est donnée dans l'appendice A2. Nous écrivons ici une expression valable pour les temps "longs" (at $V_r^2 \sim \phi > \Delta\phi$) :

$$(IV - A,13) \quad A(V_r, \phi, t) \approx (m + 1) / \sqrt{2} + 0.3 (\phi / av_o^2 t) \\ [1 - (0.7 a t V_r^2 / \phi)] - 1$$

Cette formule n'est cependant pas valable pour les temps très longs. Nous avons représenté sur la figure 10 la variation de l'anisotropie en fonction du temps, calculée d'après la formule exacte (sur cette figure la formule (IV-1,13) s'applique approximativement pour $1000s < t < 3000s$). On voit que cette anisotropie commence à croître, phénomène qui provient de ce que les particules de forts angles d'attaque dérivent plus vite que les particules de faibles angles d'attaque. Mais le temps s'écoulant et l'injection étant instantanée à $t = 0$, donc arrêtée ensuite, en un point de longitude donnée ϕ , il ne se met plus à passer que les particules d'angles d'attaque faibles, et l'anisotropie décroît.

A partir de la formule (II,11), nous obtenons le coefficient d'amplification des ondes. La formule complète est donnée dans l'appendice A2. Nous

donnons ici la formule valable pour les temps "longs" avec la même restriction que pour l'anisotropie :

$$(IV - A,14) \quad \gamma/\omega_{ci} = \left[\pi / \Gamma(m + 1) \right] \left(n_1^0/n_O + n_1 \right) \left[(1 - x)^{1/2} / (2 - x) \right]$$

$$\left(\frac{\Delta\phi}{\phi} \right) \frac{v_r^2}{v_O^2} \frac{v_O}{v_A} \left\{ \exp \left[-(\phi/atv_O^2) \right] \right\} \left(\frac{\phi}{atv_O^2} \right)^{m+1}$$

$$\left(1 - \frac{0.7a t v_r^2}{\phi} \right)^m \left[\exp \left(-0.3 \frac{v_r^2}{v_O^2} \right) \right] \left[A(v_r) - \frac{x}{1 - x} \right]$$

Dans cette formule, $A(v_r)$ est donnée par (IV-A,13). D'après (IV-A,14) le maximum de γ par rapport à la fréquence est obtenu pour une valeur de la vitesse résonante v_r telle que :

$$(IV - A,15) \quad (v_r^2/v_O^2) \approx \frac{(\phi/a t v_O^2)}{0.7m+0.3(\phi/atv_O^2)}$$

Par ailleurs, la formule (II,9) de la vitesse résonante donne :

$$(IV-A,16) \quad 1/x \approx (v_r/v_A) + (3/2)$$

A partir de ces deux dernières formules, nous pouvons donc, en fixant le paramètre (v_A/v_O) , calculer la fréquence la plus amplifiée en fonction du temps et de la position azimutale ϕ . Un exemple d'un tel calcul, que nous discutons dans le paragraphe suivant, est donné sur la figure 11.

Nous allons maintenant examiner quelques conséquences des résultats des calculs précédents, afin de les comparer à des données expérimentales pour les ondes et pour le flux des particules.

IV - A - 4 - Comparaison des calculs avec l'expérience.

Comme première application, considérons les résultats du calcul de la fréquence réduite la plus amplifiée au cours du temps $x_M(t, \phi)$ à une position ϕ donnée (figure 11). On constate que cette fréquence augmente avec le temps. Cependant cet accroissement a des conséquences faibles parce que la valeur correspondante de γ décroît rapidement de part et d'autre de sa valeur la plus élevée (nous avons porté les valeurs du coefficient d'amplification γ , correspondant à $x_M(t, \phi)$, sur la figure 11). Le même phénomène se reproduit identiquement aux différentes longitudes avec une atténuation de γ lorsque ϕ croît, due à l'étalement croissant des particules injectées (sur la figure 11, comparer les courbes obtenues pour $\phi = 90^\circ$ et $\phi = 120^\circ$).

Remarquons de plus que deux effets tendent à réduire encore l'accroissement de $x_M(t)$ avec t :

1/ Nous n'avons pas tenu compte de l'anisotropie dans la formule (IV - A,15), ce qui est une approximation habituelle. Or cette anisotropie décroît avec t , et comme elle intervient dans γ par le terme $[A - x/(1-x)]$ ceci contrarie l'accroissement de $x_M(t)$ (un effet un peu semblable apparaît dans la formule (II,24) donnant le maximum de γ dans un cas indépendant du temps).

2/ L'expression (IV - A,2) de la fonction de distribution suppose une injection instantanée des particules sous la forme $\delta(t)$ en tout point ϕ . Il est évident qu'une injection non instantanée conduit à une atténuation des effets observés. En particulier quand l'injection devient permanente, on tend vers un état stationnaire pour lequel x_M ne dépend plus du temps.

La faible variation de $x_M(t, \phi)$ avec t , à une position ϕ donnée, est en bon accord avec les mesures d'ondes UBF ($f \sim 0.1$ Hz) obtenues à bord du satellite géostationnaire ATS-1 (McPherron et al., 1972; Bossen, communication privée, 1975). En effet, ces enregistrements présentent une fréquence qui ne change pratiquement pas au cours du temps (pendant un temps suffisamment court, de l'ordre de 1'heure, cependant, afin que les conditions générales

de la magnétosphère ne varient pas sensiblement).

Il est intéressant de noter que les résultats théoriques et expérimentaux ci-dessus infirment certaines idées s'appuyant sur les variations rapides des moments caractéristiques de la fonction de distribution (figure 10), pour expliquer la montée en fréquence au cours du temps de certaines émissions enregistrées au sol (IPDP) (Fukunishi, 1969). Nous verrons dans le chapitre IV-B qu'il faut plutôt relier ces émissions à l'effet de dérive radiale dûe au champ électrique statique.

Citons aussi les résultats de travaux théoriques récents proches de nos calculs et qui sont en accord avec ceux-ci. Il s'agit d'une part de calculs numériques (Lin et Parks, 1976), d'autre part d'un travail analytique et numérique (Jentsch, 1976). Dans ce dernier travail, l'auteur ne calcule cependant pas la fréquence la plus amplifiée $x_M(t)$, ni le coefficient d'amplification maximum correspondant, mais seulement celui obtenu pour une fréquence fixée par avance; mais par ailleurs il considère certains effets dûs à l'introduction d'un champ magnétique non-dipolaire (modèle de Mead) ou d'un champ électrique statique (il faut relier ce dernier cas à notre chapitre IV-B).

Une deuxième application de nos calculs (traitée en détail dans la réf.V) concerne les déformations des fonctions de distribution au cours de la dérive azimutale des particules. Partant de l'expression (IV-A,4), nous étudions, pour une position ϕ donnée, l'évolution au cours du temps de la fonction de distribution en angle d'attaque α , pour une énergie donnée. A cause de la dérive différentielle en angle d'attaque (cf. formule (IV-A,3)), la fonction de distribution, à une position ϕ donnée, qui présente d'abord un maximum pour $\alpha = \pi/2$, va ensuite présenter un minimum pour $\alpha = \pi/2$ et deux maxima α_1 et $\pi - \alpha_1$, symétriques par rapport à $\pi/2$ ($0 < \alpha_1 < \pi/2$). Ces maxima se déplacent au cours du temps (figure 12). L'instant pour lequel la fonction de distribution est maximale aux angles α_1 et $\pi - \alpha_1$ est donné par :

$$(IV - A,17) \quad (t/\phi) = \frac{1 + \left[1 + 4m \left(\frac{\Delta\phi}{\phi} \right)^2 \frac{0.7 + 0.3 \sin\alpha_1}{0.3(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_{LC})} \right]^{1/2}}{2 av^2 (0.7 + 0.3 \sin\alpha_1)}$$

où α_{LC} est l'angle du cône de perte. Nous comparons ces calculs aux calculs et aux mesures de Konradi et al (1973). Cette comparaison est résumée sur la figure 13. Konradi et al. ont considéré la trajectoire individuelle des particules tandis que nous avons pris en compte les effets collectifs en calculant la fonction de distribution par le théorème de Liouville. Les résultats des deux calculs sont différents dès que la fonction de distribution initiale est anisotrope ($m \neq 0$) et cela conduit en particulier à des différences importantes pour les angles faibles ($\alpha_1 < 20^\circ$). Nos résultats indiquent donc l'intérêt de mesures des flux de particules pour des angles faibles, car ces mesures permettraient d'avoir accès expérimentalement au produit $m(\Delta\phi)^2$ et donc d'avoir des indications sur l'anisotropie m ou la largeur d'injection initiale $\Delta\phi$ des particules.

Nous allons maintenant étudier, dans la deuxième partie de ce chapitre, les effets dûs à la présence d'un champ électrique statique. Toutefois, comme nous venons de constater que les effets d'une injection dépendant du temps sont faibles en ce qui concerne l'amplification des ondes, nous supposerons une injection stationnaire, ce qui simplifie grandement les calculs.

IV-B - CONVECTION DES PARTICULES ENERGETIQUES EN PRESENCE D'UN CHAMP ELECTRIQUE DANS LE CAS STATIONNAIRE (réf. VII) -

IV-B-1 - Position du problème

On peut, en simplifiant beaucoup, se représenter la convection des particules énergétiques venant de la queue de la magnéosphère comme composée de deux phases successives. Dans une première phase les particules pénètrent radialement sous l'effet d'un fort champ électrique de convection des grandes valeurs de ($L \sim 10$) jusqu'à des valeurs de L plus faibles ($L \sim 5$). (La vitesse de dérive des particules sous l'influence d'un champ électrique est :

$$\vec{v}_D = \vec{E} \times \vec{B}_0 / B_0^2$$

dans le cas de variations spatiales et temporelles "lentes" des champs; voir Roederer, 1970). Il s'établit donc un certain gradient de densité en L . Puis dans un deuxième temps les particules se mettent à dériver azimutalement sous l'effet du champ magnétique, tout en pénétrant radialement mais beaucoup plus faiblement sous l'effet d'un champ électrique atténué.

Nous étudions cette deuxième phase du processus. Cette approche est différente de celles utilisées par ailleurs (voir, par exemple, Ashour-Abdalla and Cowley, 1974 ; Cowley and Ashour-Abdalla, 1975) où le mouvement des particules est étudié depuis son origine ($L \sim 10$). En étudiant seulement la deuxième phase du processus nous évitons une difficulté importante qui provient de la variation des champs électrique et magnétique avec le temps (Roederer and Hones, 1974). En particulier on ne peut pas dans un modèle de convection stationnaire, reconstituer, en partant d'une source de particules située à $L \sim 10$, les fonctions de distribution observées aux faibles valeurs de L ($L \sim 4$).

Donc nous nous donnons une fonction de distribution, à minuit dans le plan équatorial, présentant un gradient de densité radial. Minuit est pris comme origine azimutale $\phi = 0$. Puis nous calculons la fonction de distribution, résultant d'une convection stationnaire, en tout autre point ($L, \phi \neq 0$) du plan équatorial. Nous appliquons ce calcul à des mesures obtenues à bord d'un satellite, concernant les flux des protons énergétiques de l'anneau de courant à différentes heures locales. Puis nous calculons le coefficient d'amplification des ondes instables et nous en déduisons quelques conséquences pour les interactions entre ondes et particules.

Nous étudions le cas des protons énergétiques (10 - 100 kev) et des ondes électromagnétiques cyclotroniques ioniques. Des calculs semblables pourraient être faits pour les électrons énergétiques interagissant avec le mode cyclotronique électronique.

Une étude partielle de ce problème a déjà été effectuée par Kilvelson et Southwood (1975). Ces auteurs ont calculé numériquement les changements des fonctions de distribution résultant de l'effet des champs magnétique et électrique statiques.

Les calculs concernant ce chapitre sont effectués dans la réf.VII, jointe en annexe. Nous n'en reprendrons ici que les principaux résultats.

IV-B-2 - Principe du calcul de la fonction de distribution en tout point (L, ϕ).

Nous prenons la fonction de distribution à minuit (indice M) sous la forme :

$$(IV-B,1) \quad f(\alpha_M, v_M, L_M, \phi_M = 0) =$$

$$\frac{n_1}{n_0} \frac{(L_M/L_g)^p}{\pi^{3/2} v_0^3 \Gamma(m+1)} \left(\frac{v_M}{v_0} \right)^{2m} \left[\exp - \left(\frac{v_M}{v_0} \right)^2 \right] \sin^{2m} \alpha_M$$

f est normalisée à n_1/n_0 . n_1 est la densité des protons énergétiques à une position donnée (L_1 , $\phi_M = 0$). n_0 est la densité du plasma froid, qui dépend de L et ϕ . v_0 , vitesse caractéristique et m , anisotropie initiale sont fixées pour $\phi_M = 0$ et sont indépendantes de L . Le terme $(L_M/L_g)^p$, dans lequel L_g est un facteur d'échelle, représente le gradient radial de densité pour $\phi_M = 0$. Nous pouvons choisir p positif ou négatif pour représenter les différentes situations expérimentales possibles.

Pour calculer f en tout point ($L, \phi \neq 0$) nous utilisons trois invariants du mouvement des particules, qui nous permettent d'exprimer α_M, v_M, L_M , en fonction de α, v, L, ϕ au point (L, ϕ). Alors avec le théorème de Liouville nous écrivons :

$$f(\alpha, v, L, \phi) \equiv f[\alpha_M(\alpha, v, L, \phi), v_M(\dots), L_M(\dots)]$$

Les trois invariants sont donnés par la conservation de l'énergie totale $\frac{1}{2} m v^2 + q \Psi(L, \phi)$ (Ψ potentiel électrostatique), le premier invariant adiabatique $v_\perp^2/B_0(L)$, le deuxième invariant adiabatique $\int v_\parallel ds$ (ds élément de longueur de la ligne de force de \vec{B}_0).

L'énergie potentielle électrostatique des protons s'écrit sous la forme (Roederer, 1970) :

$$(IV-B,2) \quad q \Psi = - (C_1/L R_e) - C_2 L R_e \sin \phi$$

où l'angle azimutal ϕ est compté positivement vers l'ouest (sens de dérive des protons énergétiques) ; elle se compose des deux termes de corotation (C_1) et de convection (C_2).

L'expression assez longue obtenue pour $f(\alpha, v, L, \phi)$ est donnée dans la réf.VII (formule 14). Elle n'est valable que pour des protons dont l'énergie $E \gtrsim 10$ kev à la position considérée (L, ϕ). Nous en faisons une première application dans le paragraphe suivant.

IV-B-3 - Flux asymétrique des protons énergétiques de l'anneau de courant.

Nous calculons le flux des protons d'angle d'attaque $\alpha = 90^\circ$ dans une certaine bande d'énergie :

$$(IV-B,3) \quad J(L, \phi, v_1 < v < v_2, \alpha = \pi/2) = n_0 \int_{v_1}^{v_2} f v^3 dv$$

Nous en déduisons une expression pour le rapport des flux à minuit et à tout autre position locale :

$$(IV-B,4) \quad J(L, \phi) / J(L_M, \phi_M) \approx (L/L_M)^p [\exp 2 \varepsilon_0] \\ \exp \delta_0 [1 - (1 - \frac{2}{3} \varepsilon_1)^{1 + \frac{\delta_1}{3}}] \\ (1 - \frac{2}{3} \varepsilon_1)^m [3 + (1 + \frac{\delta_1}{3}) \delta_1] - p(1 + \frac{\delta_1}{3})$$

avec $\varepsilon = \frac{C_2 L R_e \sin \phi}{m_i v^2}$

$$\varepsilon_0 \equiv \varepsilon(v = v_0)$$

$$\varepsilon_1 \equiv \varepsilon(v = v_1)$$

et $\delta = \frac{2 C_1}{m_i R_e v^2} \frac{1}{L}$

$$\delta_0 \equiv \delta(v = v_0)$$

$$\delta_1 \equiv \delta(v = v_1)$$

Le paramètre ϵ est lié au champ électrique de convection (C_2) et le paramètre δ au champ électrique de corotation (C_1).

Il est facile d'interpréter physiquement l'effet des différents termes de (IV-B,4) quand nous nous écartons de minuit (ϕ croît à partir de $\phi_M = 0$). L'accroissement du rapport des flux dû aux facteurs exponentiels (ϵ_0 et δ_0) traduit l'accélération des particules par les champs électriques de convection et de corotation ; l'énergie de ces particules peut alors dépasser $E_1 = \frac{1}{2} m_i v_1^2$ et elles viennent contribuer au flux. Le dernier terme de (IV-B,4) est lié à la pénétration radiale des particules et son effet dépend du signe et de la grandeur du paramètre p et de la grandeur du facteur d'anisotropie m . Pratiquement, pour le gradient externe de l'anneau de courant ($L > 4$, $p \sim (-4)$, $m \sim 1$) ce terme entraîne une diminution du flux alors que pour le gradient interne ($p \sim 7$ à 10 , $m \sim 1$), il contribue à l'augmentation du flux. Il est intéressant aussi de remarquer que si l'énergie des particules augmente, c'est-à-dire si ϵ_0 , ϵ_1 , δ_0 , δ_1 tendent vers zéro, tous les effets disparaissent : les particules de très haute énergie ne sont pas sensibles au champ électrique (cf chapitre IV-A) et ne pénètrent pas radialement ; le flux est alors indépendant de ϕ .

Les figures 14 et 15 illustrent la formule (IV-B,4). Nous avons utilisé comme source à minuit les mesures du flux des protons énergétiques après un orage magnétique, obtenues par Frank (1970) à bord du satellite OGO 3. Nous avons alors calculé, en utilisant (IV-B,4), le flux en résultant le soir ($\phi = \pi/2$). En fait, pour la figure 14, la formule (IV-B,4) a été légèrement modifiée afin de pouvoir comparer nos résultats avec les calculs numériques de Kilvelson et Southwood (1975) qui ont utilisé une fonction de distribution initiale maxwellienne pour l'énergie. La courbe que nous obtenons est alors proche de celle de Kilvelson et Southwood lorsque nous choisissons des valeurs identiques pour les paramètres initiaux v_0, m et pour les coefficients C_1 et C_2 du potentiel électrostatique. Nous montrons aussi,

sur la figure 14, l'effet obtenu en négligeant le champ de corotation ($\delta_1 = \delta_\infty = 0$).

Sur la figure 15 nous montrons, qu'en choisissant correctement le paramètre v_∞ nous pouvons, en utilisant (IV-B,4) (non modifiée), reproduire les mesures du flux des protons obtenues par Frank (1970) du côté soir ($\phi = \pi/2$). Ce flux augmente par rapport au flux observé à minuit : c'est ce que l'on désigne sous le vocable "asymétrie de l'anneau de courant". La comparaison de nos résultats (ou de ceux de Kilvelson et Southwood) avec les mesures de Frank n'est néanmoins pas aussi valable qu'elle pourrait l'être s'il n'existe pas un délai de quelques heures entre les mesures faites à minuit et celles faites le soir, alors que les protons énergétiques passent de minuit au soir en environ une heure. Ce problème, qui provient du fait que le satellite tourne autour de la terre dans le sens contraire au sens de dérive des protons énergétiques, apparaît toujours avec des mesures faites en utilisant un seul satellite.

IV-B-4 - Anisotropie A et coefficient d'amplification γ des ondes électromagnétiques cyclotroniques ioniques.

Les expressions de A et γ sont obtenues en portant la fonction de distribution $f(\alpha, v, L, \phi)$ résultant du phénomène de convection, dans les formules (II,11) et (II,13). La forme complète de ces expressions est donnée dans la réf.VII en annexe (formules 21 et 22). Nous n'en discuterons ici que les traits caractéristiques.

L'anisotropie A apparaît, en négligeant en première approximation les effets du champ de corotation, sous la forme :

$$(IV-B,5) \quad A(V_r) \approx m + (3m - p) \epsilon_r I_r$$

avec :

$$\varepsilon_r = \frac{C_2 L R_e \sin \phi}{m_i V_r^2}$$

et $I_r \sim 5 \times 10^{-2}$

Il apparaît clairement d'après cette expression que l'anisotropie, pour V_r , C_2 et L fixés, va croître lorsqu'on s'éloigne de minuit (ϕ croît) dans le gradient externe de l'anneau de courant ($L > 4$, $m \sim 0,5$, $p \sim (-4)$) et va au contraire décroître dans le gradient interne ($L < 4$, $m \sim 0,5$, $p \sim 7$ à 10). Cet effet est dû à ce que, à énergie fixée, les particules de faibles angles d'attaque pénètrent radialement plus profondément que les particules de grands angles d'attaque (Cf. formule IV-A,3). Nous avons représenté sur la figure 16 cette anisotropie en fonction de ε_r dans le cas du gradient externe de l'anneau de courant. Pour une position donnée (L, ϕ), $A(V_r)$ est d'autant plus grande que le champ de convection (C_2) est plus important ou que la vitesse résonnante V_r est plus faible. Il faut cependant noter, qu'en général, pour des valeurs caractéristiques de V_r et C_2 , $\varepsilon_r \lesssim 1/4$ et l'augmentation d'anisotropie relative est assez faible. Cette dernière remarque souligne la difficulté qu'il y a à créer, dans un modèle de convection stationnaire, des fonctions de distribution fortement anisotropes.

En ce qui concerne le coefficient d'amplification γ des ondes il y a deux effets dûs à la convection à considérer. Le premier effet vient de l'augmentation (ou de la diminution) de l'anisotropie discutée ci-dessus. Ceci conduit à un élargissement vers les hautes fréquences de γ . Le deuxième effet provient de l'augmentation du flux, des particules lorsque ϕ croît à L fixé (paragraphe IV-B,3 ; figures 14 et 15) et entraîne un accroissement de γ . A ces deux effets se superpose l'effet important de la variation de la densité du plasma froid. Sur la figure 17 nous avons calculé le coefficient d'amplification en fonction

de la fréquence réduite x pour différentes positions (L, ϕ). Nous partons de minuit ($\phi_M = 0$) avec $L = 6$; à cette position initiale l'anisotropie choisie étant $m = 0.5$, la fréquence critique (pour laquelle $\gamma = 0$; cf formule II,20) est $x_c = 1/3$. Puis nous nous déplaçons vers le soir ($\phi = \pi/2$) à distance géocentrique constante. Nous constatons que l'effet de la convection se traduit effectivement, comme nous l'avons indiqué plus haut, par un accroissement de γ et un élargissement vers les hautes fréquences; mais la fréquence correspondant au maximum de γ ne change pas. Puis nous calculons γ , toujours pour $\phi = \pi/2$, mais à une distance géocentrique plus faible ($L = 4$) et nous considérons que la densité de plasma froid n_0 varie en L^{-4} (Chappel, 1972). Dans ce cas nous constatons, en plus de l'accroissement de γ et de l'élargissement vers les hautes fréquences (par rapport à la position minuit) un déplacement vers les hautes fréquences du maximum de γ . Ce déplacement est essentiellement lié à la variation de la densité du plasma froid (et de B_0) avec L . Il souligne encore une fois (cf. Chap.II) l'importance du rôle du plasma froid pour l'amplification des ondes.

Ces derniers résultats peuvent être appliqués aux émissions UBF de type IPDP (Irregular Pulsations of Decreasing Period), que nous avons déjà évoquées dans le chapitre IV-A. Ces émissions sont caractérisées, sur les enregistrements réalisés au sol, par un accroissement de leur fréquence centrale ($f \sim 0.2$ Hz à 1.5 Hz) au cours du temps, en un temps caractéristique variant de vingt minutes à une heure (fig.18). Ces émissions résultent vraisemblablement d'une interaction résonante entre les ondes électromagnétiques cyclotroniques ioniques et des protons énergétiques fraîchement injectés, dérivant radialement et azimutalement (Lacourly et Gendrin, 1967; Gendrin et Lacourly, 1968; Gendrin, 1970). Leur changement en fréquence est dû à la variation en fréquence du coefficient d'amplification en fonction de L (au sol, par suite d'effets dus à l'ionosphère on peut recevoir à une même position

des émissions se produisant sur différentes coquilles magnétiques). Le temps caractéristique de montée en fréquence est lié à la dérive différentielle des particules : pour $\alpha = \pi/2$ la formule (IV-A,3) donne
 $\dot{\phi}_D (\text{rd/s}) \approx 2.35 \times 10^{-6} L E(\text{kev})$.

Cependant une étude approfondie de ces émissions exige à la fois la prise en compte de la phase initiale d'injection des particules (pendant laquelle s'établit le gradient de densité radial) et de la phase de diffusion des particules (cf. Chap.III). Une telle étude est actuellement hors de notre propos.

CHAPITRE V - CONCLUSION

Les résultats théoriques obtenus dans ce travail sont, dans l'ensemble, en bon accord avec les mesures faites à bord de satellites ou au sol. Dans le chapitre II nous avons souligné l'importance du plasma froid (c'est-à-dire de la position de la plasmopause ou éventuellement de la présence de "nuages de plasma détachés") pour l'émission des ondes. Dans le chapitre III nous avons montré que l'intensité du champ magnétique des ondes cyclotroniques et le flux des particules piégées, calculés à partir de la théorie quasi-linéaire avec une hypothèse stationnaire, sont proches de ce qui est obtenu par les mesures. Dans la première partie du chapitre IV nous avons vu que le résultat du calcul de la déformation en angle d'attaque des fonctions de distribution au cours de la dérive azimutale des particules est en bon accord avec les résultats expérimentaux. D'autre part le calcul du coefficient d'amplification des ondes instables montre que, en un point (L, ϕ) donné, la fréquence la plus amplifiée change peu au cours du temps, ce qui est confirmé par les enregistrements des ondes à bord de satellites géostationnaires. Enfin, dans la deuxième partie du chapitre IV, nous avons introduit un champ électrostatique de convection. Il en résulte à la fois une dérive radiale et azimutale des particules énergétiques. Les résultats du calcul du changement spatial des fonctions de distribution permettent d'expliquer correctement l'asymétrie azimutale de l'anneau de courant des protons énergétiques (~ 30 kev) et d'aborder le problème du changement en fréquence des émissions UBF de type IPDP.

Tous ces calculs ont été faits avec un certain nombre d'hypothèses simplificatrices. Dans le chapitre III nous avons supposé une propagation parallèle à B_0 ; cependant les résultats obtenus pour les particules d'énergies moyennes (10-100 kev) ne semblent pas en être trop affectés. Ceci s'explique par le fait que dans ce cas l'interaction résonante la plus intense est obtenue pour la propagation parallèle

à \vec{B}_0 . Un calcul autoconsistant complet, avec une direction de propagation quelconque semble très difficile car on ajoute alors une dimension supplémentaire au problème de la diffusion. Ceci rejoint d'ailleurs le cas des ondes électrostatiques (Ashour-Abdalla et Kennel, 1976) dont le vecteur d'onde k à deux composantes k_{\parallel} et k_{\perp} . Un autre point important est l'hypothèse de stationnarité (par. III-4). Une solution simultanée complète du problème du calcul des spectres des ondes cyclotroniques émises et de la diffusion en angle d'attaque des particules, dans un cas non-stationnaire, reste encore à obtenir (Cornwall, 1975 ; réf. VI). Une telle solution est nécessaire pour évaluer les effets que peuvent produire d'éventuels changements rapides des paramètres du plasma magnéto-sphérique (densité du plasma froid, par exemple). Ce problème des effets transitoires est aussi lié à la source des particules énergétiques (son "intensité", son "anisotropie", etc...). Les particules peuvent être fournies par le processus de convection dont nous avons étudié certains aspects dans le chapitre IV. Les hypothèses simplificatrices dans ce dernier chapitre sont essentiellement d'une part la stationnarité du processus de convection (IV-B), d'autre part le découplage entre les interactions ondes-particules et la convection. Un traitement temporel satisfaisant de la convection exige la prise en compte de l'interaction entre le plasma injecté, le champ magnétique terrestre et le champ électrique de convection (effet diamagnétique en particulier). Le couplage entre les interactions ondes-particules et la convection nécessite une estimation des différentes échelles de temps : temps de perte des ondes et des particules, temps caractéristiques d'injection de la source et de dérive des particules ; ceci est relié dans une large mesure au problème de l'estimation des effets transitoires évoqué à propos du chapitre III.

Des enregistrements rapides (à des intervalles de quelques secondes) des spectres des ondes émises, plus nombreux (en particulier pour les ondes ioniques cyclotroniques) sont nécessaires pour orienter (et vérifier) les calculs théoriques. Notons aussi l'importance des mesures des flux des particules énergétiques de faibles angles d'attaque

(Cf. Chap.III, diffusion faible ou forte ; Chap. IV-A, évaluation de l'anisotropie et de la largeur d'injection des particules). Ces dernières mesures sont cependant difficiles à réaliser car elles exigent des résolutions en angle d'attaque de l'ordre du degré. Le satellite géostationnaire Européen (Geos), qui sera lancé cette année, fournira de ce point de vue de nombreux renseignements précieux sur les ondes et les particules.

Nous ne pouvons terminer ce mémoire sans évoquer aussi les développements récents concernant les autres planètes du Système Solaire. Des mesures récentes obtenues par satellites (Pionneer 10, 11 ; Mariner 10, etc...) ont montré que ces planètes possèdent aussi des magnétosphères (propres ou induites), assez semblables à la magnétosphère Terrestre (Vénus, Mercure) ou très différentes (planètes géantes, en particulier Jupiter et Saturne) (Hill et Michel, 1975) ; dans ce dernier cas les différences proviennent, dans une large mesure, de la rotation "rapide" de ces planètes. Il est intéressant de noter, pour finir, que la diffusion en angle d'attaque semble jouer un rôle important pour expliquer les précipitations des électrons relativistes de la proche magnétosphère de Jupiter (Fillius et al, 1976). Nul doute que la mise en orbite, pour la première fois, autour de Jupiter (en 1984) d'un satellite à bord duquel seront effectuées, simultanément, des mesures d'ondes et de particules permettra des développements importants en ce qui concerne la physique des magnétosphères planétaires.

ANNEXE . 1 . (A₁)

EXPRESSION DU CHAMP DES ONDES COMME FONCTION DES PARTICULES EN
INTERACTION

Nous partons de l'équation (III,1) moyennée sur z, que nous intégrons à $v = c^{\text{te}}$ en tenant compte du fait que $\langle B_k^2 \rangle \geq 0$ pour $\alpha = \pi/2$ (i.e. $x = 1$ ou $v_r = 0$) :

$$\int_{\alpha}^{\pi/2} \left[\frac{\partial f(\alpha', v)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f(\alpha', v)}{\partial \vec{r}} - S(\alpha', v) + P(\alpha', v) \right] \sin \alpha' d\alpha'$$
$$= - \pi \frac{q^2}{m_e^2} \frac{\sin \alpha}{|v_r - v_g|} \langle B_k^2 \rangle \frac{\partial f(\alpha, v)}{\partial \alpha}$$

Puis nous multiplions chaque membre de cette équation par :

$$\pi \omega_{ce} |v_r|^3 (1-x)^2 \frac{\sin \alpha}{\cos^4 \alpha} [1 - \frac{x}{A(1-x)}]$$

Intégrant alors à $v_r = C^{\text{te}}$ (i.e. $x = C^{\text{te}}$ et $k = C^{\text{te}}$) entre $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi/2$, nous faisons apparaître ainsi le coefficient d'amplification (II,10) dans le membre de droite :

$$\pi \omega_{ce} |v_r|^3 \left[1 - \frac{x}{A(1-x)} \right] (1-x)^2$$

$$\int_{\alpha; v_r = cte}^{\pi/2} \frac{\sin \alpha}{\cos^4 \alpha} d\alpha \int_{\alpha; v = cte}^{\pi/2} \left[\frac{\partial f(\alpha', v)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f(\alpha', v)}{\partial \vec{r}} - S(\alpha', v) + P(\alpha', v) \right]$$

$$\sin \alpha' d\alpha' = - \frac{q^2}{m_e^2} \frac{\langle B_k^2 \rangle}{|v_r - v_g|} \gamma_k e - R$$

Nous utilisons alors l'équation (III,4) pour éliminer le produit $\gamma_k \langle B_k^2 \rangle$ et nous obtenons (en remplaçant aussi $\langle B_k^2 \rangle$ par $\langle B_f^2 \rangle \equiv (2\pi/V_g) \langle B_k^2 \rangle$) :

$$(A2,1) \quad \frac{\partial \langle B_f^2 \rangle}{\partial t} + \frac{V_g}{2\pi} g(R) \langle B_f^2 \rangle =$$

$$4\pi \frac{2 m_e^2}{q^2} \omega_{ce} \frac{|v_r - v_g|}{V_g} |v_r|^3 (1-x)^2 \left[1 - \frac{x}{A(1-x)} \right]$$

$$\int_{\alpha; v_r = cte}^{\pi/2} \frac{\sin \alpha}{\cos^4 \alpha} d\alpha \int_{\alpha; v = cte}^{\pi/2} [S - P - (\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}})] \sin \alpha' d\alpha'$$

Nous avons donc pour $\langle B_f^2 \rangle$ une équation différentielle par rapport au temps du 1er ordre et inhomogène, qu'il est facile d'intégrer pour obtenir l'expression (III,5).

ANNEXE 2 (A₂)

I - CALCUL DE LA DENSITE n₁ (φ, t)

Nous avons d'après (IV-A,4) et (IV-A,5) :

$$(A_2,1) \quad n_1(\phi, t) = n_1^o 4 \pi b$$

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} \left(\frac{v}{v_o} \right)^{2m} \exp \left[- \left(v/v_o \right)^2 \right] \sin^{2m+1} \alpha v^2 \\ \exp \left\{ - \left[\phi - av^2 t (c_1 + c_2 \sin \alpha) \right]^2 / (\Delta \phi)^2 \right\} dv d\alpha$$

Nous posons

$$(A_2,2) \quad \begin{aligned} d &= \frac{a^2 t^2}{(\Delta \phi)^2} (c_1 + c_2 \sin \alpha) \\ g &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{2a + v_o^2 \phi}{(\Delta \phi)^2} (c_1 + c_2 \sin \alpha) \right] \end{aligned}$$

g peut être positif ou négatif. L'intégrale portant sur v s'écrit alors:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} \left(\frac{v}{v_o} \right)^{2m} e^{-dv^4} -gv^2 v^2 dv \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{v_o^{2m}} \int_0^{\infty} e^{-du^2} -gu u^{m+\frac{1}{2}} du \end{aligned}$$

Elle s'exprime à l'aide des fonctions cylindriques paraboliques $D_p(y)$ (Gradshteyn et Ryzhik, 1965) :

$$(A_2,3) \quad I = \frac{1}{2 v_o^{2m}} (2d)^{-\left(\frac{m}{2} + \frac{3}{4}\right)}$$

$$\Gamma\left(m + \frac{3}{2}\right) \exp(g^2/8d) D_{-\left(m + 3/2\right)}(g/\sqrt{2d})$$

Nous obtenons donc :

$$(A_2,4) \quad n_1(\phi, t) = \frac{2\pi b n_1^\circ}{v_o^{2m}} \exp\left[-\left(\phi/\Delta\phi\right)^2\right]$$

$$\Gamma\left(m + \frac{3}{2}\right) \int_0^{\pi/2} (2d)^{-\left(\frac{m}{2} + \frac{3}{4}\right)} \sin^{\frac{2m+1}{2}} \alpha \exp(g^2/8d)$$

$$D_{-\left(m + 3/2\right)}(y) \frac{da}{d\alpha}$$

avec $y = g/\sqrt{2d} = \sqrt{2} \frac{1 - h(\phi/\Delta\phi)}{h}$

$$h = \frac{2a v_o^2 t}{(\Delta\phi)} (c_1 + c_2 \sin \alpha)$$

Si nous nous plaçons hors de la largeur initiale d'injection ($\phi > \Delta\phi$) et si nous considérons des temps "longs" ($a_v^2 t \gg \phi$) nous avons

$y \lesssim -1$. Dans ce cas le développement asymptotique de $D_p(y)$ donne :

$$(A_2,5) \quad D_p(y) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-p)} e^{p\pi i} [\exp(y^2/4)] y^{-p-1}$$

Portant ce développement dans (A₂,4) avec $p = -(m + \frac{3}{2})$ nous obtenons après quelques calculs :

$$(A2,6) \quad n_1(\phi, t) \simeq \frac{2n_1^\circ}{\Gamma(m+1)} (\Delta\phi/\phi)$$

$$(\phi/av_o^2 t)^{m+\frac{3}{2}} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^\alpha \alpha \exp[-\phi/av_o^2 t(c_1 + c_2 \sin \alpha)]}{(c_1 + c_2 \sin \alpha)^{m+\frac{3}{2}}} d\alpha$$

Pour $m = 1$, $c_1 = 0.7$ et $c_2 = 0.3$ cette expression conduit facilement à (IV-A,7).

II - CALCUL DE LA VITESSE THERMIQUE $\langle v^2 \rangle (\phi, t)$.

Nous avons d'après (IV-A,4) et (IV-A,10) :

$$(A2,7) \quad \langle v^2 \rangle (\phi, t) = \frac{n_1^\circ 4\pi b}{(n_1(\phi, t))}$$

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} \left(\frac{v}{v_o} \right)^{2m} \exp \left(-\frac{v^2}{v_o^2} \right) v^4 \sin^\alpha \alpha \\ \exp \left\{ - \left[\phi - av^2 t (c_1 + c_2 \sin \alpha) \right]^2 / (\Delta\phi)^2 \right\} dv d\alpha$$

Un calcul semblable à celui effectué pour la densité conduit à :

$$(A2,8) \quad \langle v^2 \rangle (\phi, t) = (m + \frac{3}{2}) \frac{\Delta\phi}{\sqrt{2} \text{ at}}$$

$$x \frac{\int_0^{\pi/2} \frac{\sin \alpha^{2m+1}}{(C_1 + C_2 \sin \alpha)^{m+\frac{5}{2}}} \exp(g^2/8d) D_p(y)_{-\frac{m+5}{2}} d\alpha}{\int_0^{\pi/2} \frac{\sin \alpha^{2m+1}}{(C_1 + C_2 \sin \alpha)^{m+\frac{3}{2}}} \exp(g^2/8d) D_p(y)_{-\frac{m+3}{2}} d\alpha}$$

Comme y varie peu avec α (car $c_2 = 0.3$) et que les 2 intégrales sont très semblables nous pouvons écrire :

$$(A2,9) \quad \langle v^2 \rangle (\phi, t) \approx (m + \frac{3}{2}) \frac{\Delta\phi}{\sqrt{2} \text{ at}} \frac{\frac{D_p(y)_{-\frac{m+5}{2}}}{D_p(y)_{-\frac{m+3}{2}}}}{}$$

$$1) \text{ Lorsque } t \rightarrow 0, y \sim \frac{\Delta\phi}{v_0^2 \sqrt{2} \text{ at}} \rightarrow +\infty.$$

Dans ce cas le développement asymptotique de $D_p(y)$ donne :

$$(A2,10) \quad D_p(y) \sim y^p \exp(-y^2/4)$$

En portant ce développement, avec $p = -(m + \frac{5}{2})$ et $p = -(m + \frac{3}{2})$ respectivement, dans (A2,9) on voit facilement que l'on retrouve (IV-A,11).

2) Dans la limite des temps "longs" en utilisant (A2,5) nous obtenons la formule (IV-A,12).

III - CALCUL DE L'ANISOTROPIE $A(V_r, \phi, t)$

En partant de l'expression (II,13) de l'anisotropie et de (IV-A,4) nous obtenons par des calculs semblables à ceux des paragraphes précédents :

$$(A2,11) \quad A(V_r) = \frac{m+1}{\sqrt{2}} + (1 - 2 c_1^3) \frac{m+1}{(2\delta)^{1/2}} \frac{D_{-m-2}^{(z)}}{D_{-m-1}^{(z)}} - 1$$

avec

$$\delta = \frac{a^2 t^2 v_o^4}{(\Delta\phi)^2}$$

$$z = \frac{\Phi}{\sqrt{2}\Delta\phi} \left[2 c_1 \frac{a t v_r^2}{\phi} - 2 + \frac{(\Delta\phi)^2}{a t v_o^2 \phi} \right]$$

1) Quand $t \rightarrow 0$, $z \sim \frac{\Delta\phi}{\sqrt{2} \text{ at } v_o^2} \rightarrow +\infty$.

Dans ce cas, en utilisant (A2,10), on vérifie facilement que $A(v_r)$ tend vers m , valeur de l'anisotropie à l'instant initial.

2) Dans la limite des temps "longs", $a t v_r^2 \sim \phi > \Delta\phi$, ce qui donne $z \leq -1$; en utilisant (A2,5) nous obtenons la formule (IV-A,13). Ce calcul n'est cependant pas valable pour les temps trop longs pour lesquels z redevient positif.

IV - CALCUL DU COEFFICIENT D'AMPLIFICATION $\gamma(x, \phi, t)$.

A partir de l'expression (II,11) de γ et de (IV-A,4) nous obtenons de même :

$$(A2,12) \quad \gamma/\omega_{ci} = \sqrt{\pi} \frac{n_1^{\circ}}{n_1 + n_0} \frac{(1-x)^{1/2}}{(2-x)}$$

$$\frac{v_r^2}{2} \frac{v_o}{V_A} (2^\delta)^{-\frac{m+1}{2}} \exp [-(\phi/atv_o^2)]$$

$$\exp [-(1-2c_1^3) v_r^2/v_o^2] \exp [-(z^2/4)]$$

$$\exp [(\Delta\phi)^2 / 4a^2 t^2 v_o^4] D_{-m-1}^{(z)} [A(v_r) - \frac{x}{1-x}]$$

expression dans laquelle δ , z et $A(v_r)$ sont donnés par les formules du paragraphe III précédent.

De la même manière que pour l'anisotropie on montre facilement que lorsque $t \rightarrow 0$ on retrouve l'expression (II,23) ; pour les temps "longs" en utilisant (A2,5) on en déduit (IV-A,14), avec la même restriction que pour l'anisotropie.

BIBLIOGRAPHIE 1

Réf. I : ROUX, A. et J. SOLOMON, Mécanismes non linéaires associés aux interactions ondes-particules dans la magnéosphère, Ann. Géophys., 26, 279-297, 1970.

Réf. II: ROUX, A., and J. SOLOMON, Self-consistent solution of the quasi-linear theory : Application to the spectral shape and intensity of VLF waves in the magnetosphere, J. Atmos. Terr. Phys., 33, 1457-1471, 1971.

Réf. III: ETCHEIO, J., R. GENDRIN, J. SOLOMON, and A. ROUX, A self-consistent theory of magnetospheric ELF hiss, J. Geophys. Res., 78, 8150-8166, 1973.

Réf. IV: SOLOMON, J., Drift of particles and wave-particle interactions, in "The magnetosphere of the Earth and Jupiter", edited by V. Formisano, pp.153-159, D. Reidel, Dordrecht, Netherlands, 1975.

Réf. V : SOLOMON, J., On the azimuthal drift of substorm-injected protons, J. Geophys. Res., 81, 3452-3454, 1976.

Réf. VI: V. JENTSCH and J. SOLOMON, Relations between transient and steady-state regime for pitch-angle diffusion driven by electron or ion cyclotron waves in the magnetosphere, Communication présentée au "3rd European Geophysical Society (EGS) Meeting", Amsterdam, 7-10 Septembre 1976.

Réf. VII: J. SOLOMON and R. PELLAT, Convection and wave-particle interactions, J. Atmosph. Terr. Phys., to be published, 1977.

BIBLIOGRAPHIE 2

ASHOUR-ABDALLA, M., and S.W.H. COWLEY, wave particle interaction near the geostationary orbit, in "Magnetospheric Physics" edited by B.M. Mc Cormac, D. Reidel Publ., Dordrecht-Holland, 241-270, 1974.

ASHOUR-ABDALLA, M., and C.F. KENNEL, VLF electrostatic waves in the magnetospheres of the Earth and Jupiter, in "The Scientific Satellite Programme During the International Magnetospheric Study", ed. by Knott & Battrick, D. Reidel Pub, Dordrecht-Holland, 303-325, 1976.

ATKINSON, G., Magnetospheric flow and Substorms, In "Magnetosphere-Ionosphere Interactions", Proceedings of the Advanced Institute at Dalseter, Norway, 14-23 Avril 1971, pp 203-216, Universitetsforlaget, Oslo, 1972.

BARFIELD, J.N., Research in Magnetospheric wave Phenomena, Rev. Geophys. Space Phys., 13, 959-967, 1975.

BRICE, N., Artificial enhancement of energetic particle precipitation through cold plasma injection : A technique for seeding substorms ?, J. Geophys. Res., 75, 4890-4892, 1970.

BRICE, N., Harnessing the energy in the radiation belts, J. Geophys. Res., 76, 4698-4901, 1971.

BRINCA, A.L., On the stability of obliquely propagating whistlers, J. Geophys. Res., 77, 3495-3507, 1972.

CHAN, K.W., and R.E. Holzer, Elf hiss associated with plasma density enhancements in the outer magnetosphere, J. Geophys. Res., 81, 2267-2274, 1976.

CHAPPEL, C.R., Thermal Ions in the magnetosphere, Earth's Magnetospheric Processes, ed. by B.M. Mc Cormac, Reidel Publishing Co., Dordrecht, Holland, 280-290, 1972.

CORNWALL, J.M., Moment Transport equations for wave-particle interactions in the magnetosphere, J. Geophys. Res., 80, 4635-4642, 1975.

CORNWALL, J.M., on the role of charge exchange in generating unstable waves in the ring current, J. Geophys. Res., to be published, 1977.

CORNWALL, J.M., and M. SCHULZ, Electro magnetic ion-cyclotron instabilities in multicomponent magnetospheric plasma, J. Geophys. Res., 76, 7791-7796, 1971.

CORNWALL, J.M., and M. SCHULZ, Correction, J. Geophys. Res., 78, 6830, 1973.

COWLEY, S.W.H., and M. ASHOUR-ABDALLA, Adiabatic plasma convection in a dipole field : variation of plasma bulk parameters with L, Planet. Space Sci., 23, 1527-1549, 1975.

CUPERMAN, S. and LANDAU, R.W., On the enhancement of the whistler mode instability in the magnetosphere by cold plasma injection, J. Geophys. Res., 79, 128-134, 1974.

CUPERMAN, S., L. GOMBEROFF and A. STERNLIEB, Absolute maximum growth rates and enhancement of unstable electromagnetic ion-cyclotron waves in mixed warm cold plasmas, J. Plasma Phys., 13, 259-272, 1975.

DAVIDSON, R.C., and J.M. OGDEN, Electromagnetic ion cyclotron instability driven by ion energy anisotropy in high-beta plasmas, Phys. Fluids, 18, 1045-1050, 1975 ; voir aussi bibliographie de cet article.

FÄLTHAMMAR, C.G., Radial diffusion by violation of the third adiabatic invariant, pp.157-169, in Earth's Particles and Fields, ed. B.M. Mc Cormac, Reinhold Book Co., 1968.

FILLIUS, W., C. Mc ILWAIN, A.MOGRO-CAMPERO and G. STEINBERG, Evidence that pitch-angle scattering is an important loss mechanism for energetic electrons in the inner radiation belt of Jupiter, Geophys. Res. Lett., 3, 33-36, 1976.

FRANK, L.A., Direct detection of asymmetric increases of extraterrestrial "ring current" proton intensities in the outer radiation zone, J. Geophys. Res., 75, 1263-1268, 1970.

FREDRICKS, R.W., wave-particle interactions in the magnetosphere : a review, in The Magnetosphere of the Earth and Jupiter, edited by V. Formisano, pp.113-152, D. Reidel, Dordrecht, Netherlands, 1975.

FRIED, B.D. and S.D. CONTE, The plasma dispersion function, Academic Press, New-York, 1961.

FUKUNISHI, H., Occurrences of sweepers in the evening sector following the onset of magnetospheric substorms, Rep. Ionos. Space Res., Japan, 23, 21, 1969.

GENDRIN, R., Substorms aspects of magnetic pulsations, Space Sci. Rev., 11, 54-130, 1970.

GENDRIN, R., Changes in the distribution function of magnetospheric particles associated with gyroresonant interactions, in "Earth's Magnetospheric Processes", edited by B.M. Mc Cormac, D. Reidel Pub., Dordrecht-Holland, 311-328, 1972.

GENDRIN, R., Waves and wave-particle interactions in the magnetosphere: a review, Space Sci. Rev., 18, 145-200, 1975.

GENDRIN, R. and S. LACOURLY, Irregular micropulsations and their relations with the far magnetospheric perturbations, Annu. Geophys. 24, 267-273, 1968.

GENDRIN, R., S. LACOURLY, A. ROUX and J. SOLOMON, F.Z. FEIGUIN, M.V.

GOKHBERG, V.A. TROITSKAYA and V.L. YAKIMEMKO, Wave packet propagation in an amplifying medium and its application to the dispersion characteristics and to the generation mechanisms of PCl events, Planet. Space Science, 19, 165-194, 1971.

I.S. GRADSHTEYN, I.M. RYZHIK, Table of Integrals, series and products, Academic Press, New-York, 1965.

GREGORY, C.I., Pitch-angle distribution of protons and helium ions in the magnetosphere, J. Geophys. Res., 76, 268-271, 1971.

HAMLIN, D.A., R. KARPLUS, R.C. VICK and K.M. WATSON, Mirror and azimuthal drift frequencies for geomagnetically trapped particles, J. Geophys. Res., 66, 1-4, 1961.

HEIKKILA, W.J., Magnetospheric processes and dynamics, Presented at the Advanced Study Institute on Earth's Particles and Fields at Sheffield, England, 1973.

HESS, W.F., The radiation belt and magnetosphere, Blaisdell Publishing Company, 1968.

HILL, T.W., and F.C. MICHEL, Planetary Magnetospheres, Rev. Geophys. Space Phys., 13, 967-974, 1975.

HOLZER, R.E., R.K. BURTON, and K.W. CHAN, Comparison of magnetospheric hiss with plasma parameters during weak diffusion, Pub.n°1550, Institute of Geophysics and Planetary physics, UCLA, Los Angeles, Calif., feb. 1976.

JENTSCH, V., Electron precipitation in the morning sector of the auroral zone, J. Geophys. Res., 81, 135-145, 1976.

KENNEL, C.F., and H.E. PETSCHEK, Limit on stably trapped particle fluxes, J. Geophys. Res., 71, 1-28, 1966.

KILVELSON, M.G., and D.J.SOUTHWOOD, Local time variation of particle flux produced by an electrostatic field in the Magnetosphere, J. Geophys. Res., 80, 56-65, 1975.

KONRADI, A., D.J. WILLIAMS and T.A. FRITZ, Energy spectra and Pitch-angle distributions of storm-time and substorm injected protons, J. Geophys. Res., 78, 4739-4744, 1973.

LACOURLY, S., Evaluation de certains paramètres de la magnétosphère à partir des propriétés des pulsations hydromagnétiques irrégulières (S.I.P. et I.P.D.P.), Ann. Geophys., 25, 651-657, 1969.

LACOURLY, S. et R. GENDRIN, Apparition de "pulsations irrégulières de périodes décroissantes" au cours des déplacements de la frontière extérieure des zones de Van Allen, Comptes-Rendus Acad. Sci., Paris, 264 B, 658, 1967.

LIEMOHN, H., The lifetime of radiation belt protons with energies between 2 kev and 1 Mev, J. Geophys. Res., 66, 3593-3595, 1961.

LIN, C.S. and G.K. PARKS, Ion cyclotron Instability of drifting plasma clouds, J. Geophys. Res., 81, 3919-3922, 1976.

LYONS, L.R., M. THORNE and C.F. KENNEL, Pitch-angle diffusion of radiation belt electrons within the plasmasphere, J. Geophys. Res., 77, 3455-3474, 1972.

MC PHERRON, R.L., C.T. RUSSEL and P.J. COLEMAN, Jr., Fluctuating Magnetic fields in the magnetosphere, II. ULF waves, Space Sci. Rev., 13, 411-454, 1972.

NESS, N.F., The geomagnetic tail, Review of Geophysics, 7, 97-125, 1969.

O'BRIEN, B.J., High-latitude geophysical studies with satellite Injun 3, 3, Precipitation of electrons into the atmosphere, J. Geophys. Res., 69, 13-43, 1964.

PELLAT, R. and G. LAVAL, Remarks on the steady and time dependent mathematical Convection models, in "critical problems" of Magnetospheric Physics, Proceedings of the joint COSPAR/IAGA/VRSI Symposium, Madrid, Spain 11, 13 May 1972, ed. by E.R. DYER, Published by the IUCSTP Secretariat c/o National Academy of Sciences, Whashington, D.C., U.S.A Nov. 72.

PERRAUT, S. and A. ROUX, Respective role of the cold and warm plasma densities on the generation mechanism of ULF waves in the magnetosphere, J. Atm. Terrest. Phys., 37, 407-418, 1975.

ROEDERER, J.G., Dynamics of geomagnetically trapped radiation, Ed. by J.G. ROEDERER and J. ZÄHRINGER , SPRINGER-VERLAG Pub., BERLIN, 1970.

ROEDERER, J.G., and E.W. HONES , Jr., Motion of Magnetospheric particle clouds in a time-dependent electric field model, J. Geophys. Res., 79, 1432-1438, 1974.

SCHULZ, M., Particle saturation of the outer zone : A non linear model, Astrophys. Space Sci., 29, 233-242, 1974.

SMITH P.H., R.A. HOFFMAN and T. FRITZ, Ring Current Proton Decay by Charge Exchange, J. Geophys. Res., 81, 2701-2708, 1976/

STIX, J.H., The theory of plasma waves, Mc Graw-Hill, New-York, 1962.

VASYLIUNAS, V.M., The interrelationship of magnetospheric processes, in "Particles and Fields in the magnetosphere", edited by B.M. Mc Cormac, pp.29-38, D. Reidel Pb., Dordrecht Holland, 1972.

VASYLIUNAS, V.M., Concepts of magnetospheric convection, in "The magnetosphere of the Earth and Jupiter, pp.179-188, ed. by V.Formisano, D. Reidel Pb., Dordrecht Holland, 1975.

WEST, Jr, H.I., Advances in Magnetospheric Physics : Energetic Particles, Rev. Geophys. Space Phys., 13, 943-951, 1975.

SCHULZ, M., Approximate second invariant for a dipole field, J.Geophys. Res., 76, 3144-3148, 1971.

LEGENDES DES FIGURES

Figure 1 - Aspect global de la magnétosphère terrestre. Les régions aux-
quelles nous nous intéressons, dans ce travail, sont situées à des
distances géocentriques r de 2 à $8 R_e$ (R_e étant le rayon de la
Terre). Pour avoir une échelle de distance, la plasmapause est si-
tuée, sur cette figure, à une distance $r \approx 4 R_e$ (d'après Heikkila,
1973).

Figure 2 - Coupe de la magnetosphère dans un plan méridien Midi-Minuit
Les lignes de force du champ magnétique terrestre \vec{B}_o , représentées
sur cette figure, sont approximativement, en l'absence de perturba-
tion, celles d'un dipole magnétique jusqu'à des distances $r < 7 R_e$
(d'après Ness, 1969).

Figure 3 - Représentation schématique des mouvements effectués par une
particule énergétique le long des lignes de force du champ magné-
tique terrestre \vec{B}_o (rotation cyclotronique autour de \vec{B}_o et mouve-
ments d'aller-retour entre les points miroirs) et perpendiculaire-
ment à celles-ci (dérive azimutale) ; (d'après Hess, 1968).

Figure 4 - Energie spectrale des ondes calculée pour différentes valeurs
de l'anisotropie de la source ($p/2$) ; cette anisotropie a un faible
effet sur le spectre émis. Le paramètre U est égal au rapport de la
vitesse d'Alfvén des ondes V_A à la vitesse v_o caractéristique des
particules chaudes. Les valeurs choisies des paramètres sont carac-
téristiques du bord interne de la plasmapause ($L \sim 4$).

Figure 5 - Variations de la fonction de distribution en angle d'attaque
des particules en fonction de l'intensité de la source. Les courbes
sont tracées pour une énergie telle que $v = v_o$. L'accroissement de
l'intensité de la source entraîne le remplissage du cône de perte
($\alpha < \alpha_o$) (courbe 2), puis l'accroissement du nombre des particules
piégées (courbe 1).

Figure 6 - Variation du flux omnidirectionnel piégé en fonction de l'intensité de la source. La partie horizontale de la courbe théorique correspond à la pseudo-limite introduite par Kennel et Petschek (1966). En ce qui concerne la comparaison de la théorie avec les mesures, le flux piégé en fonction de l'activité magnétosphérique (K_p) est extrait de Hess (1968) ; l'intensité correspondante de la source est déduite des mesures du flux précipité (O.Brien, 1964) puisqu'en régime stationnaire la source doit juste compenser les pertes.

Figure 7 - Temps de vie des particules en fonction de leur énergie. τ_D est la période de dérive azimutale des particules, et $\tau_D/20$ le temps nécessaire à une particule pour dériver d'environ 18° . Lorsque l'intensité de la source s'accroît T_L tend vers une valeur minimum $T_{L\min}$. Il est évident, d'après la figure, que lorsque la source est faible, il est difficile d'atteindre un régime stationnaire, ce qui pose le problème des effets transitoires.

Figure 8 - Comparaison de notre formule (III,18) avec les mesures obtenues à bord du satellite OGO 5, effectuées par Holzer et al (1976). La formule (III, 18) a été normalisée par ces auteurs à la valeur moyenne du champ mesuré. Dans l'ensemble on peut constater que les changements du sens de variation de l'intensité des ondes sont bien rendus par (III, 18).

Figure 9 - Représentation schématique de la dérive azimutale et radiale, dans le plan de l'équateur, des protons énergétiques venant de la queue de la magnétosphère (les électrons tournent en sens contraire; cf. fig.3) sous l'effet des champs électrique et magnétique statiques.

Figure 10 - Variation au cours du temps, pour une longitude ϕ donnée, de la densité, de la vitesse thermique et de l'anisotropie des particules chaudes. Pour l'anisotropie nous avons choisi $v_r^2 = 2 v_o^2$.

Dans cet exemple, l'intervalle de temps où l'amplification des ondes est maximum, se situe clairement autour de la valeur $t = 1000$ s.

Figure 11 - Variation de la fréquence réduite $x_M(t)$ la plus amplifiée (i.e. pour laquelle le coefficient d'amplification est maximum) en fonction du temps, pour $\phi = 90^\circ$ (ligne continue) et $\phi = 120^\circ$ (ligne pointillée). Sur ces courbes nous avons également porté la valeur correspondante $\gamma(x_M)/\omega_{ci}$ du coefficient d'amplification. On constate que $\gamma(x_M)$ diminue rapidement de part et d'autre de son maximum maximorum qui est obtenu pour $t \approx 1000$ s et $x \approx 0.24$ (flèches sur l'axe des temps correspondant aux 2 cas $\phi = 90^\circ$ et $\phi = 120^\circ$).

Figure 12 - Evolution au cours du temps de la fonction de distribution en angle d'attaque α pour une longitude donnée [Y(α) est la partie de la fonction de distribution dépendant de α et normalisée initialement à 1]. La courbe $t = 0$ est la forme initiale de Y(α) à la longitude $\phi = 0$; t_{90} est l'instant pour lequel Y(α) atteint son maximum à $\alpha = 90^\circ$ à la longitude d'observation $\phi = 24^\circ 5$, dans ce cas. Nous représentons ensuite les formes successives de Y(α) pour les instants ultérieurs t_1 , t_2 , t_3 à cette même longitude d'observation. Dans le cas de la figure $t_{90} = 335$ s, $t_1 = 344$ s, $t_2 = 381$ s, et $t_3 = 428$ s. On voit clairement apparaître les deux maxima symétriques par rapport à $\alpha = 90^\circ$ pour $t > t_{90}$.

Figure 13 - Temps t_{α_1} pour lequel la fonction de distribution en angle d'attaque est maxima à un angle donné α_1 . Les courbes sont tracées pour différentes valeurs du paramètre $m(\Delta\phi)^2$ qui apparaît dans la formule (IV-A,17). La courbe de Konradi et al (1973) correspond à $m(\Delta\phi)^2 = 0$. Dans le cas du calcul utilisant les trajectoires individuelles des particules (Konradi et al, 1973) le maximum à $\alpha_1 = 0$ se produit après un temps fini à la différence de nos calculs. Les résultats expérimentaux de Konradi et al permettent de conclure que l'anisotropie initiale de la fonction de distribution est faible ; mais l'absence de mesures aux angles faibles ($\alpha_1 < 20^\circ$) ne permet pas, compte tenu des barres d'erreurs, d'estimer précisément $m(\Delta\phi)^2$.

Figure 14 - Flux des protons de l'anneau de courant d'après Kilvelson & Southwood (1975) et d'après notre formule (IV-B,4) modifiée, en utilisant comme source à minuit les mesures de Frank (1970). Les calculs sont faits pour un angle d'attaque des particules $\alpha = 90^\circ$ et dans la bande d'énergie de 31 à 49 kev. Les valeurs des paramètres initiaux sont : $E_0 = \frac{1}{2} m_i v_0^2 = 10$ kev, $m = 1$, $C_2 = 2$ kev R_e^{-1} ; de plus nous avons pris $p = -4$ pour $L > 3.5$ et $p = 9$ pour $L < 3.5$.

Figure 15 - Les mesures du flux des protons de l'anneau de courant obtenues par Frank (1970) à minuit et dans le secteur soir ($\alpha = \pi/2$; $31 < E < 49$ kev) et le flux théorique obtenu à partir de notre formule (IV-B,4) non modifiée, dans le secteur soir en utilisant le flux mesuré à minuit comme source. Les valeurs des paramètres initiaux sont identiques à celles de la figure 14 à part $E_0 = 9$ kev.

Figure 16 - L'anisotropie en fonction du rapport ϵ_r de l'énergie électrostatique acquise par les particules au cours de leur dérive à leur énergie résonante locale. Nous avons choisi une anisotropie initiale $m = 0.5$ à minuit.

Figure 17 - Le coefficient d'amplification réduit γ/ω_{ci} des ondes cyclotroniques ioniques en fonction de la fréquence réduite pour trois positions locales différentes dans le plan équatorial. Les valeurs des paramètres à $L = 6$ et $\phi_M = 0$ sont les suivantes : $n_1/n_0 = 0.1$, $m = 0.5$, $p = -4$, $(v_0/V_A)^2 = 10$, $E_0 = 10$ kev. De plus $C_2 = 2$ kev R_e^{-1} et $n_0 \propto L^{-4}$.

Figure 18 - Exemple d'enregistrement fréquence-temps (sonogramme) d'une émission UBF de type IPDP. Le noircissement du papier est proportionnel à l'intensité des ondes reçues (d'après Lacourly, 1969).

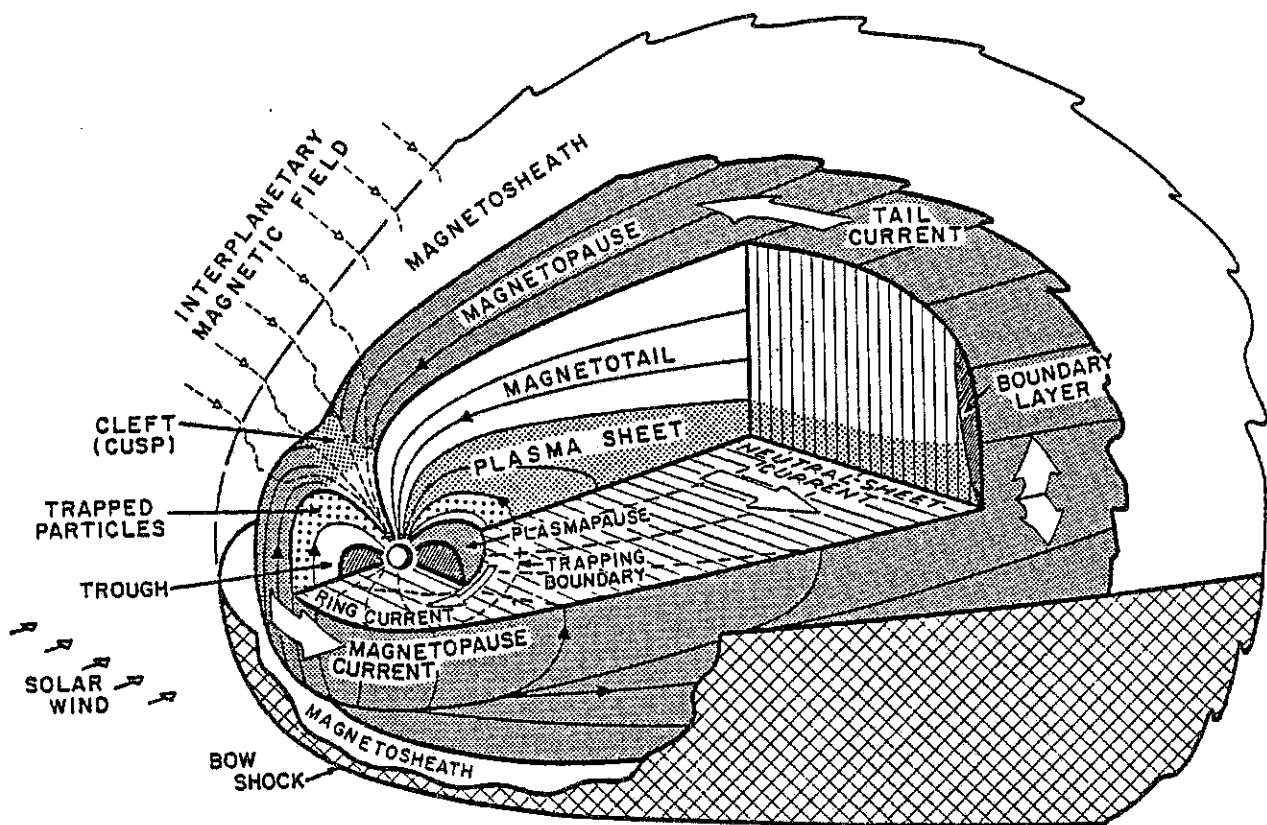


Fig. 1

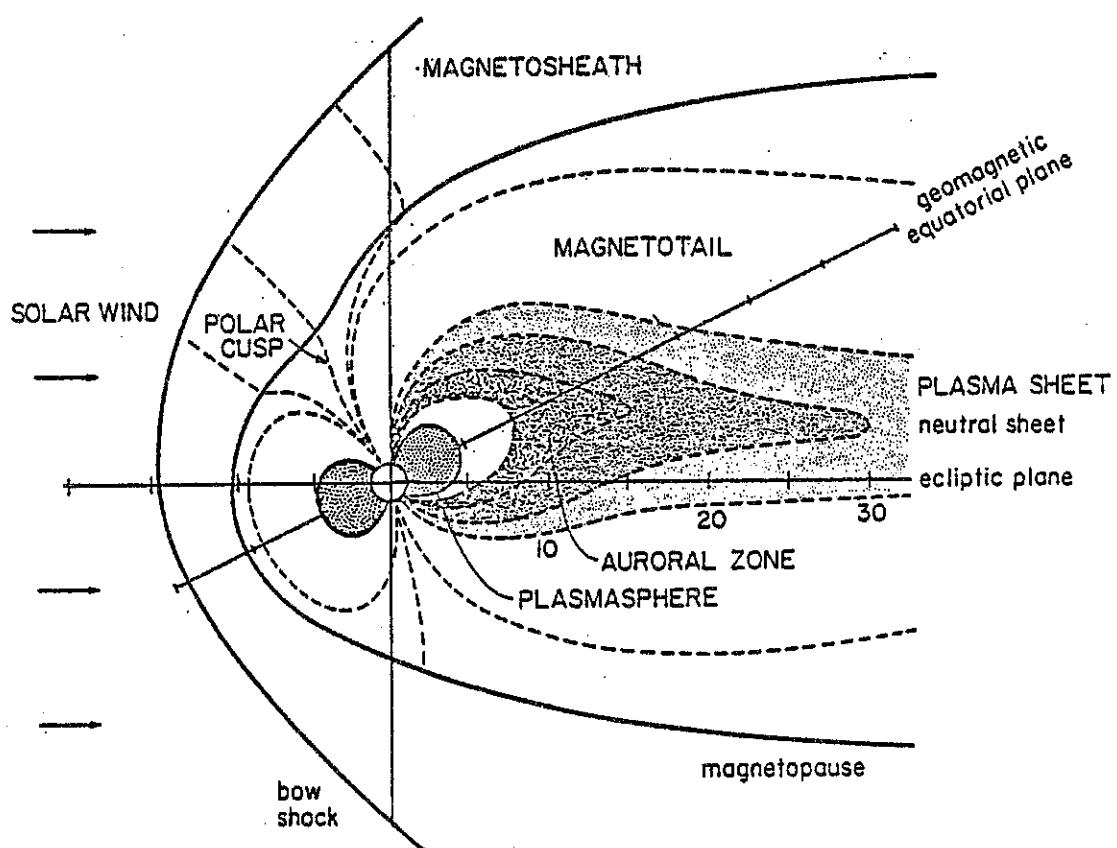


Fig. 2

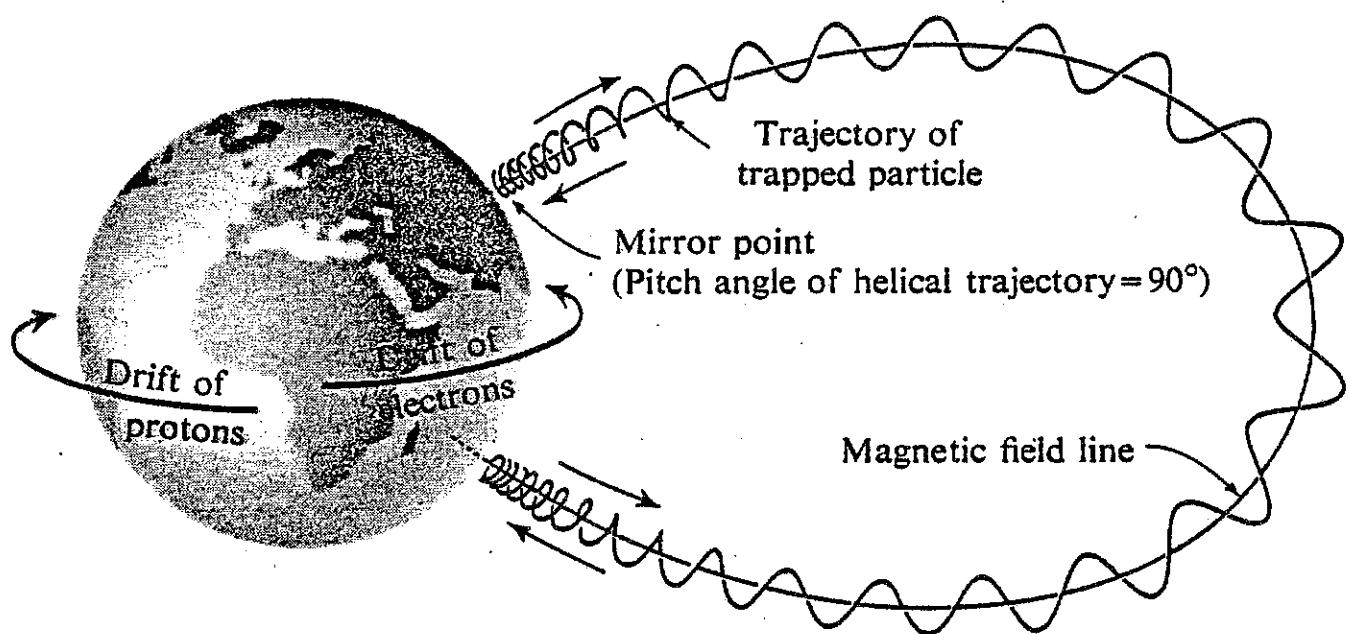


Fig. 3

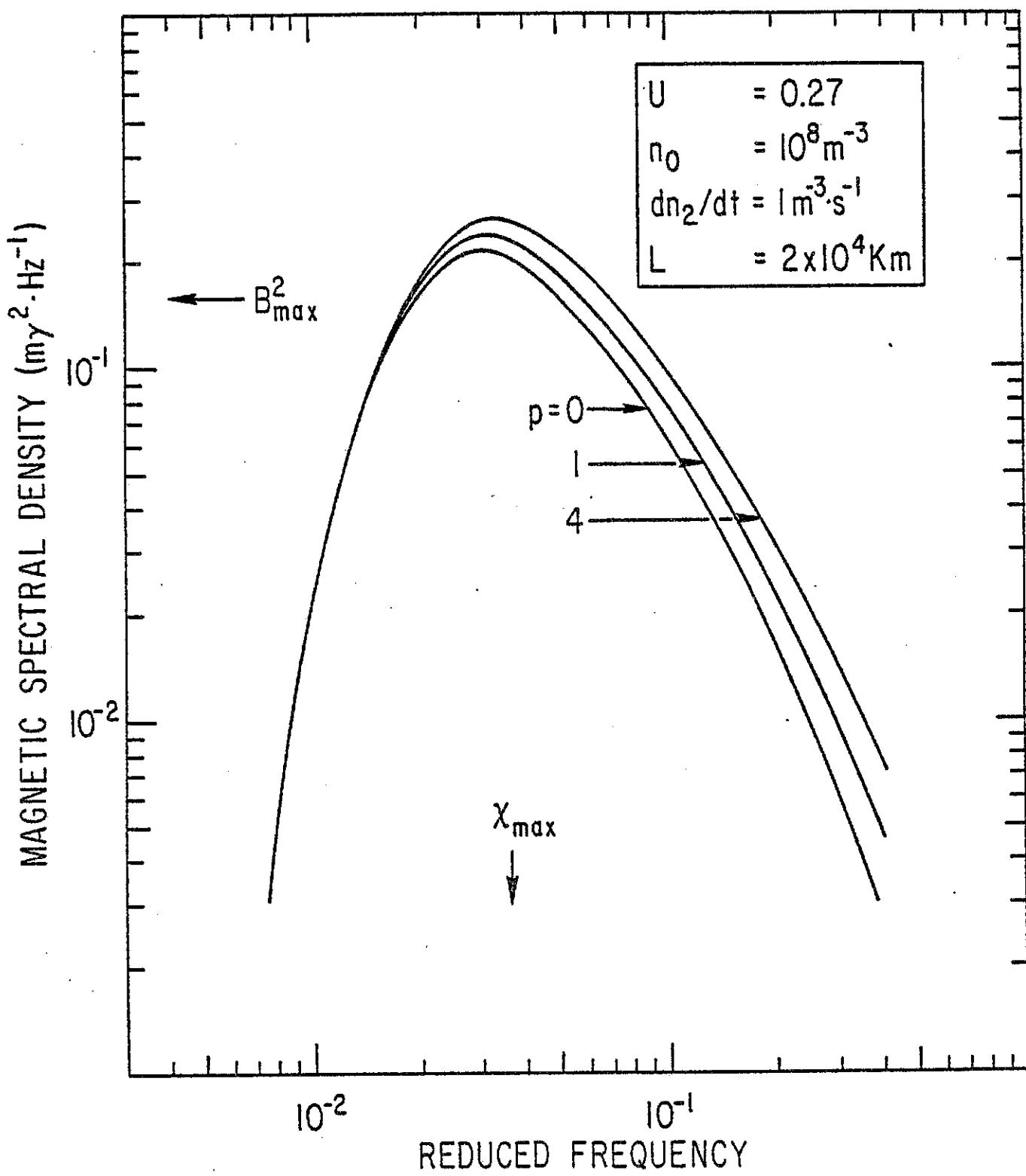


Fig. 4

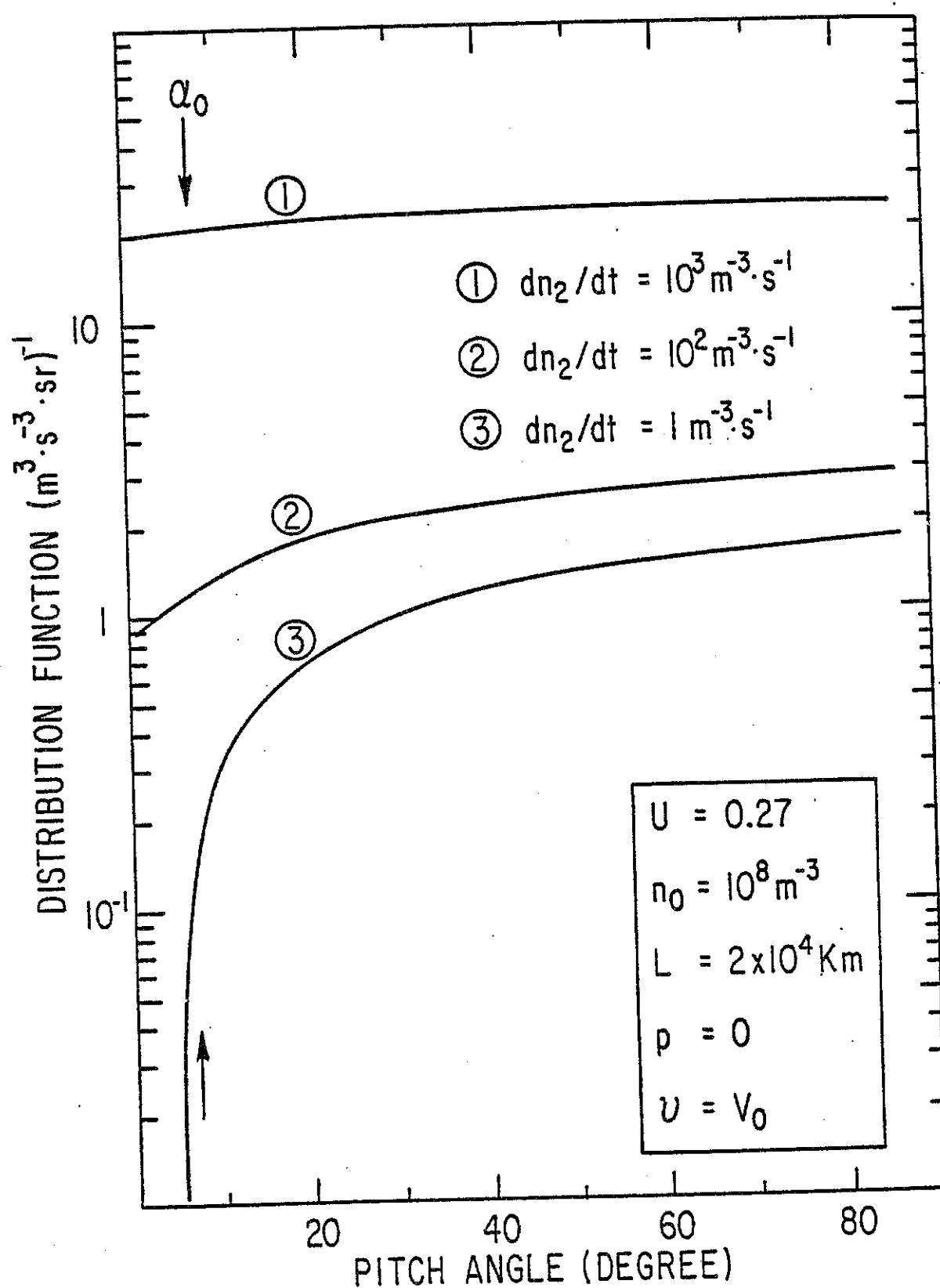


Fig. 5

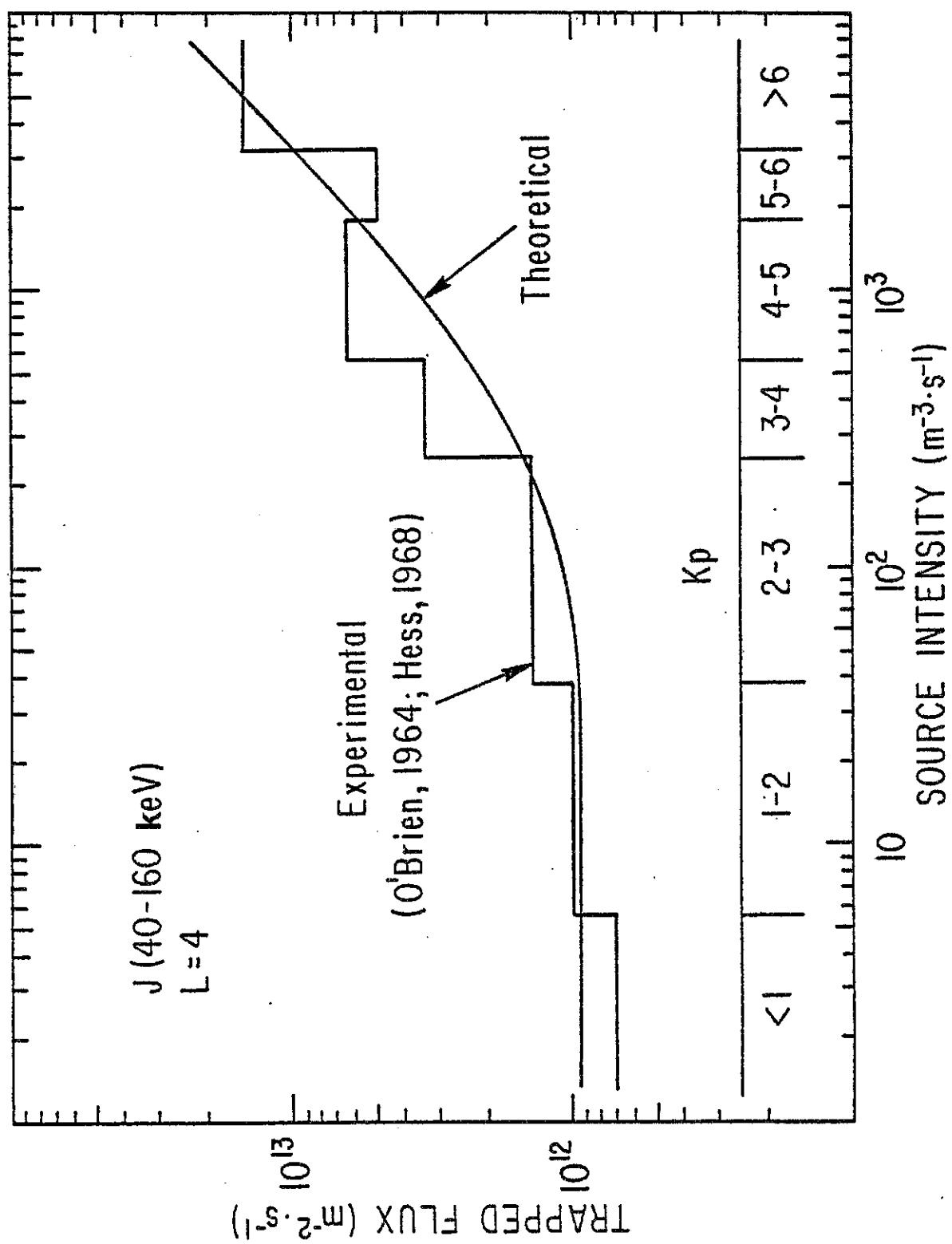


Fig. 6

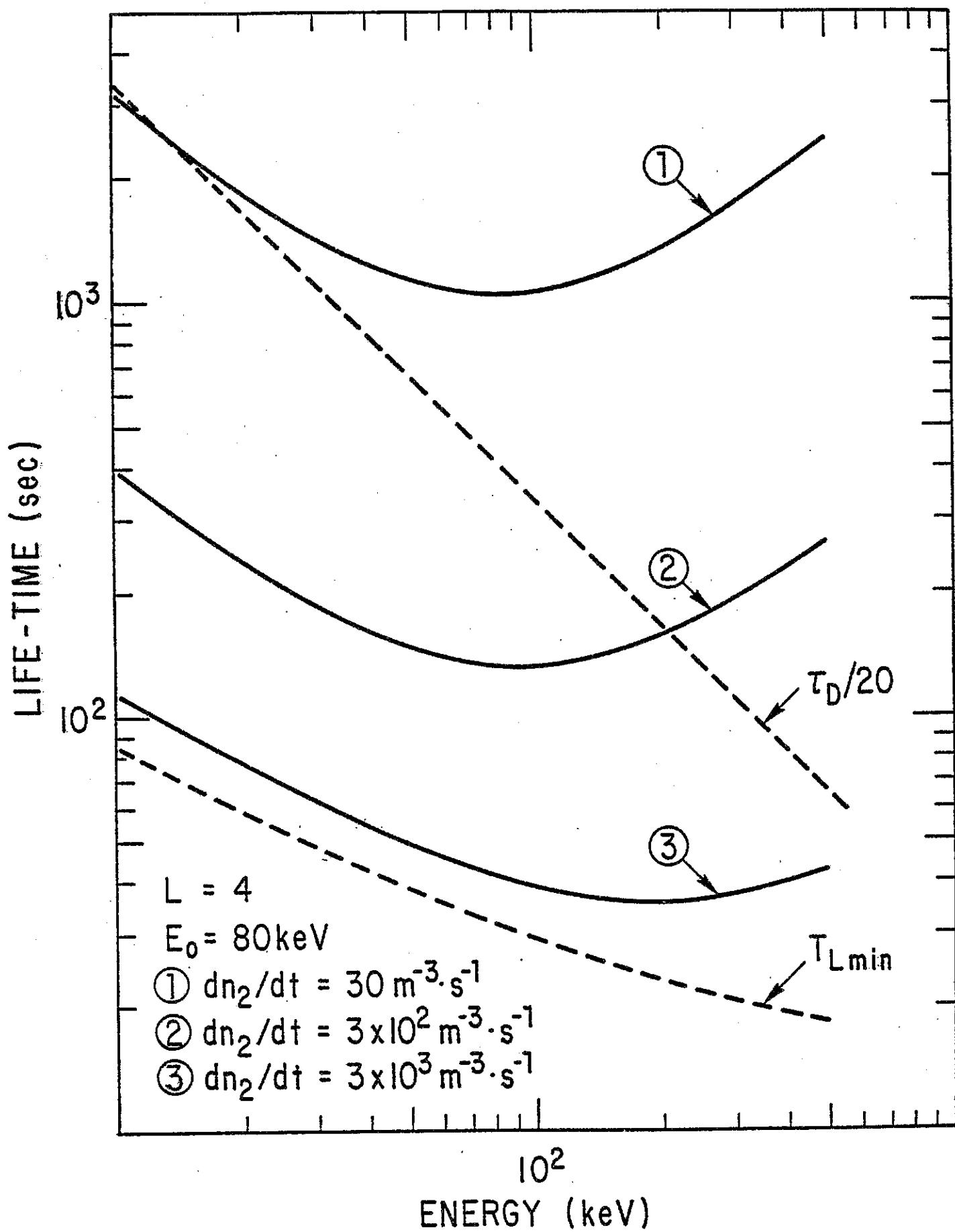
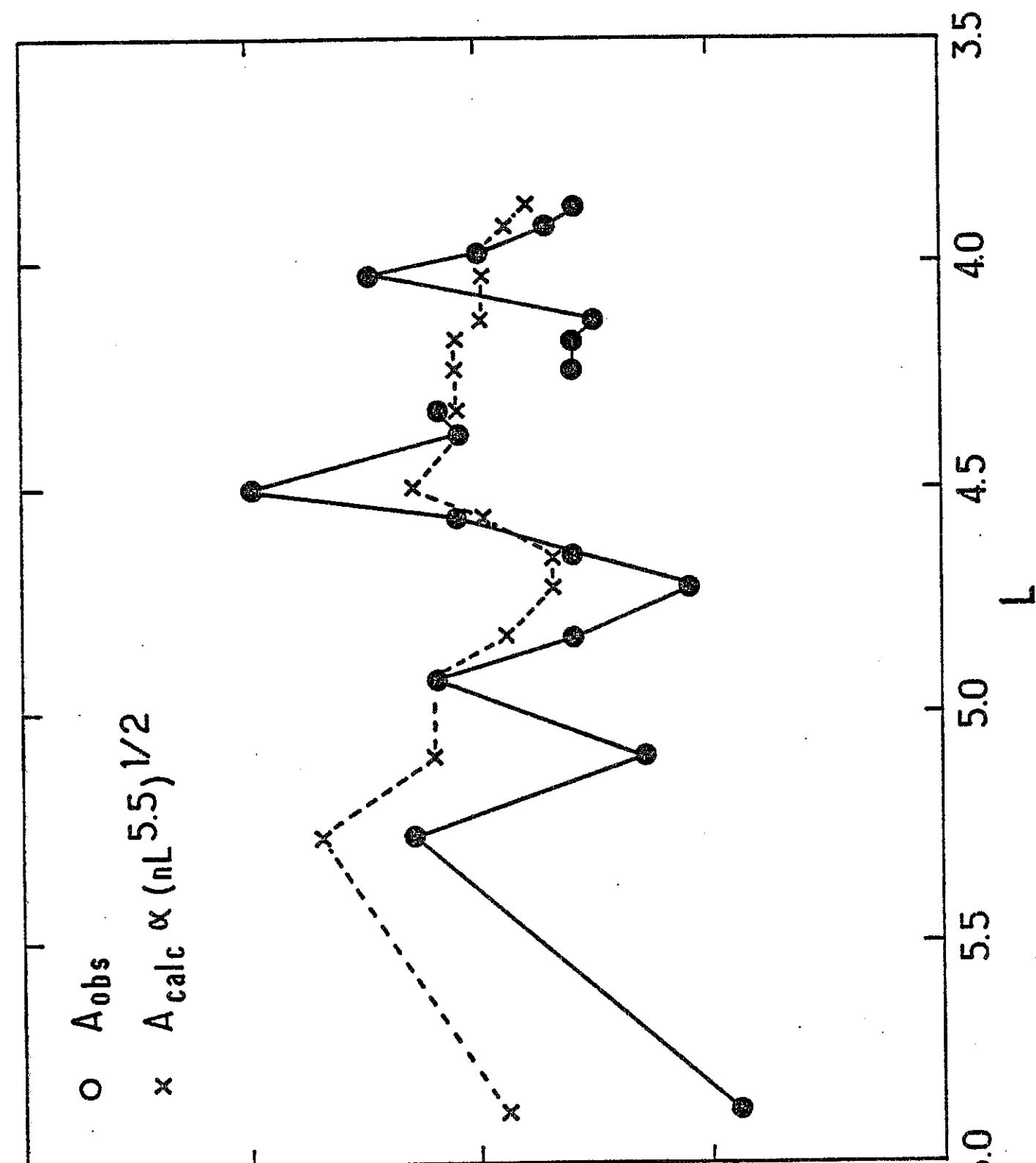


Fig. 7



$A_F (\text{mV/Hz}^{1/2})$

Fig. 8

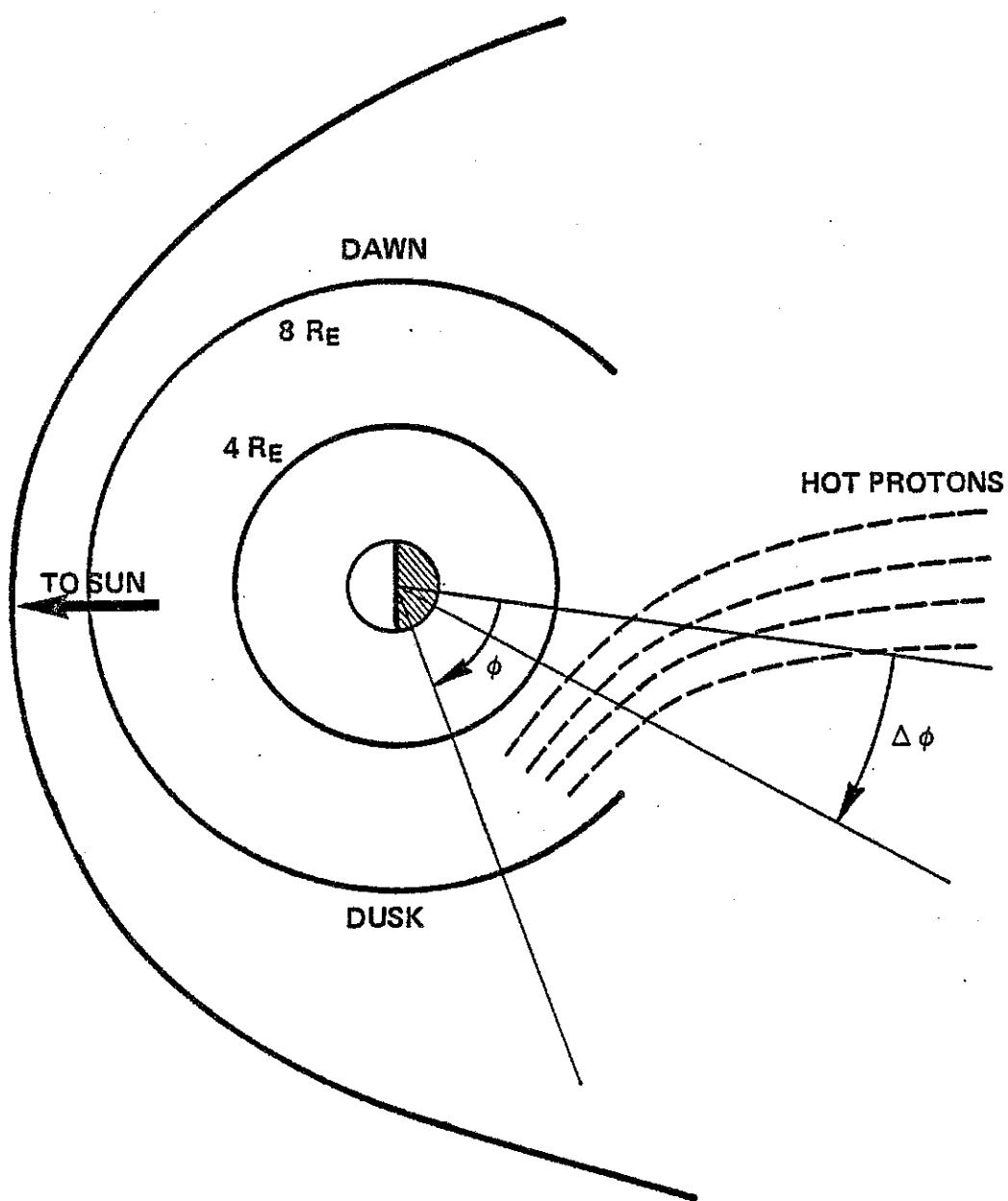


Fig. 9

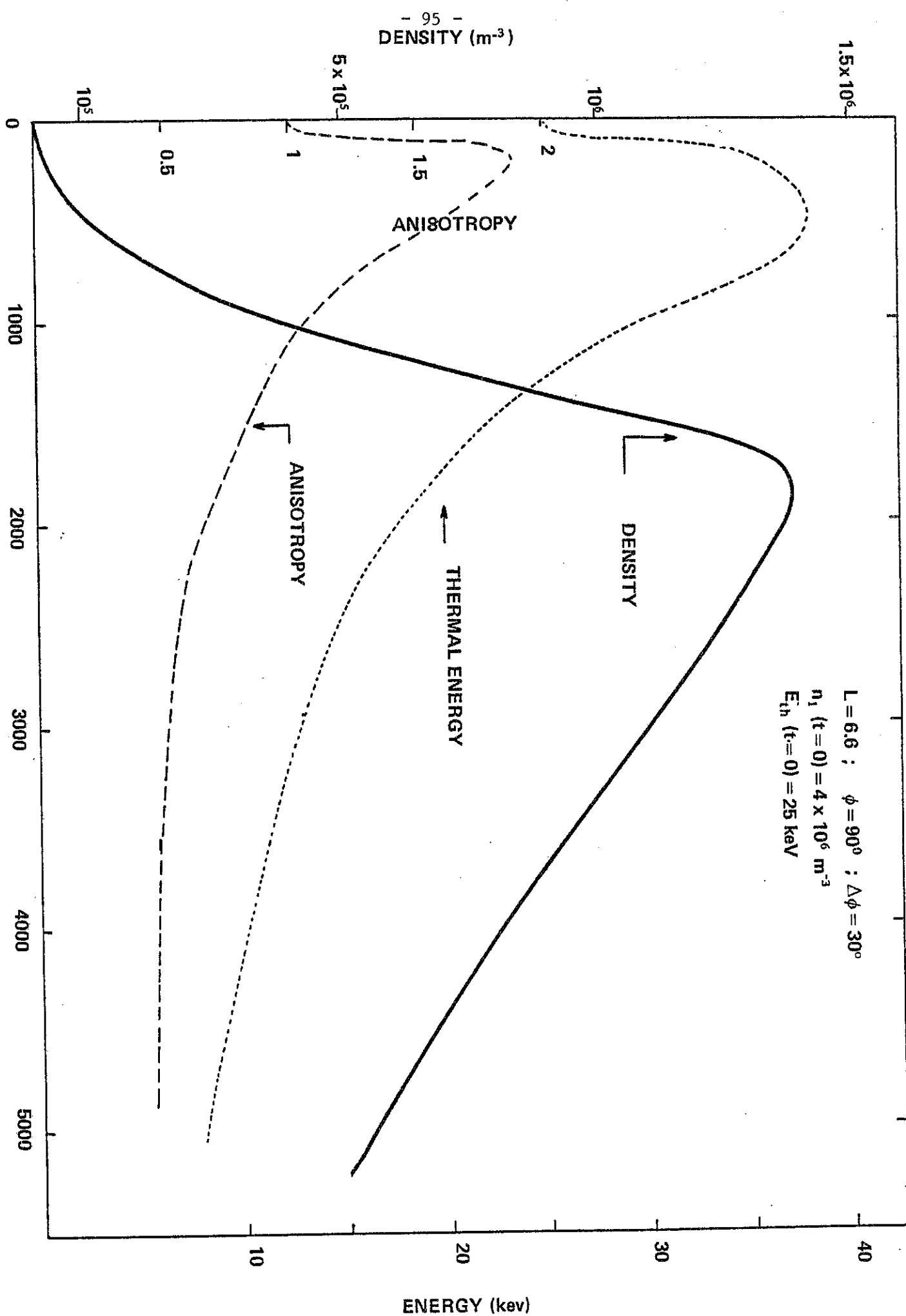


Fig. 10

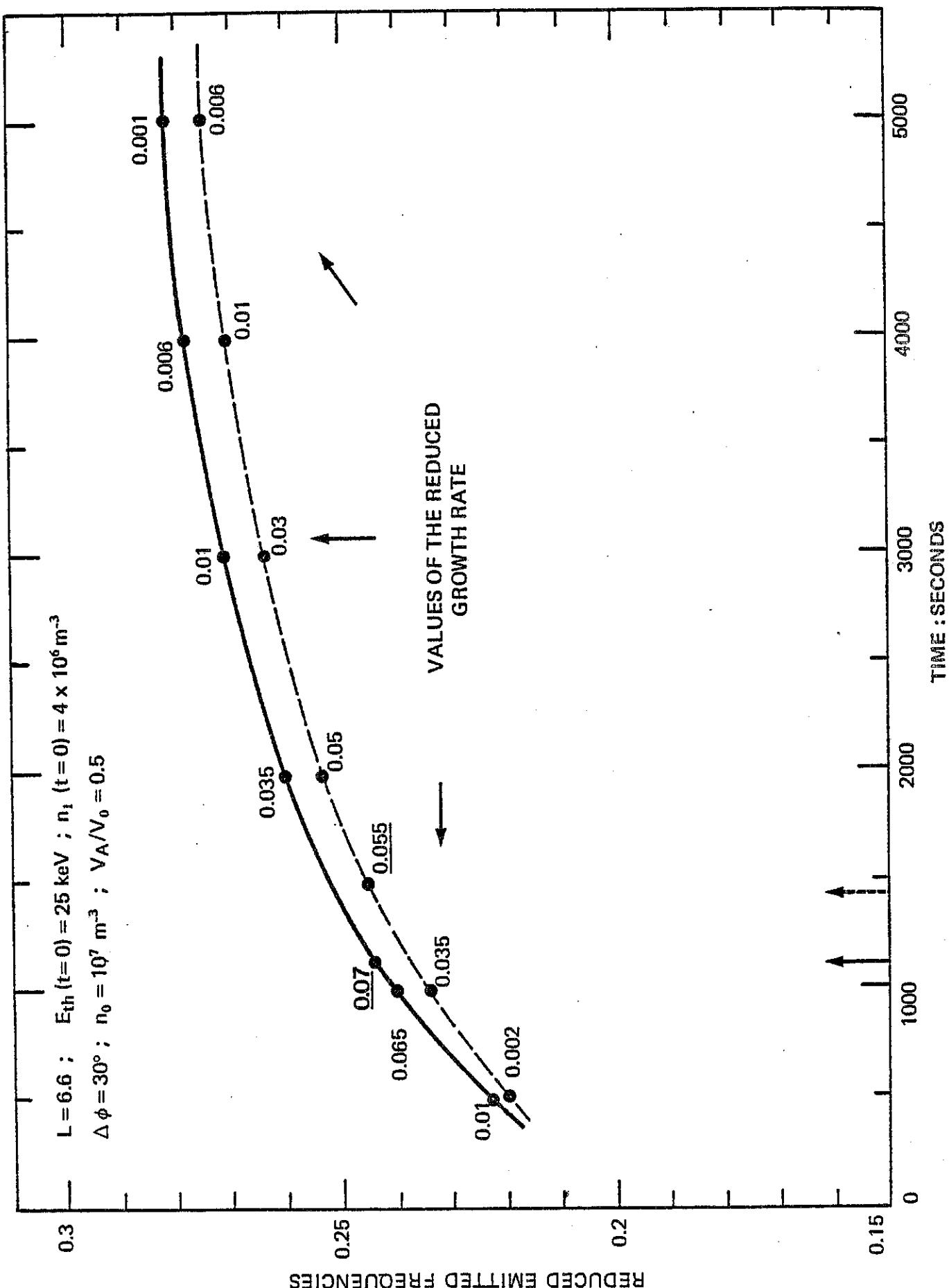


Fig. 11

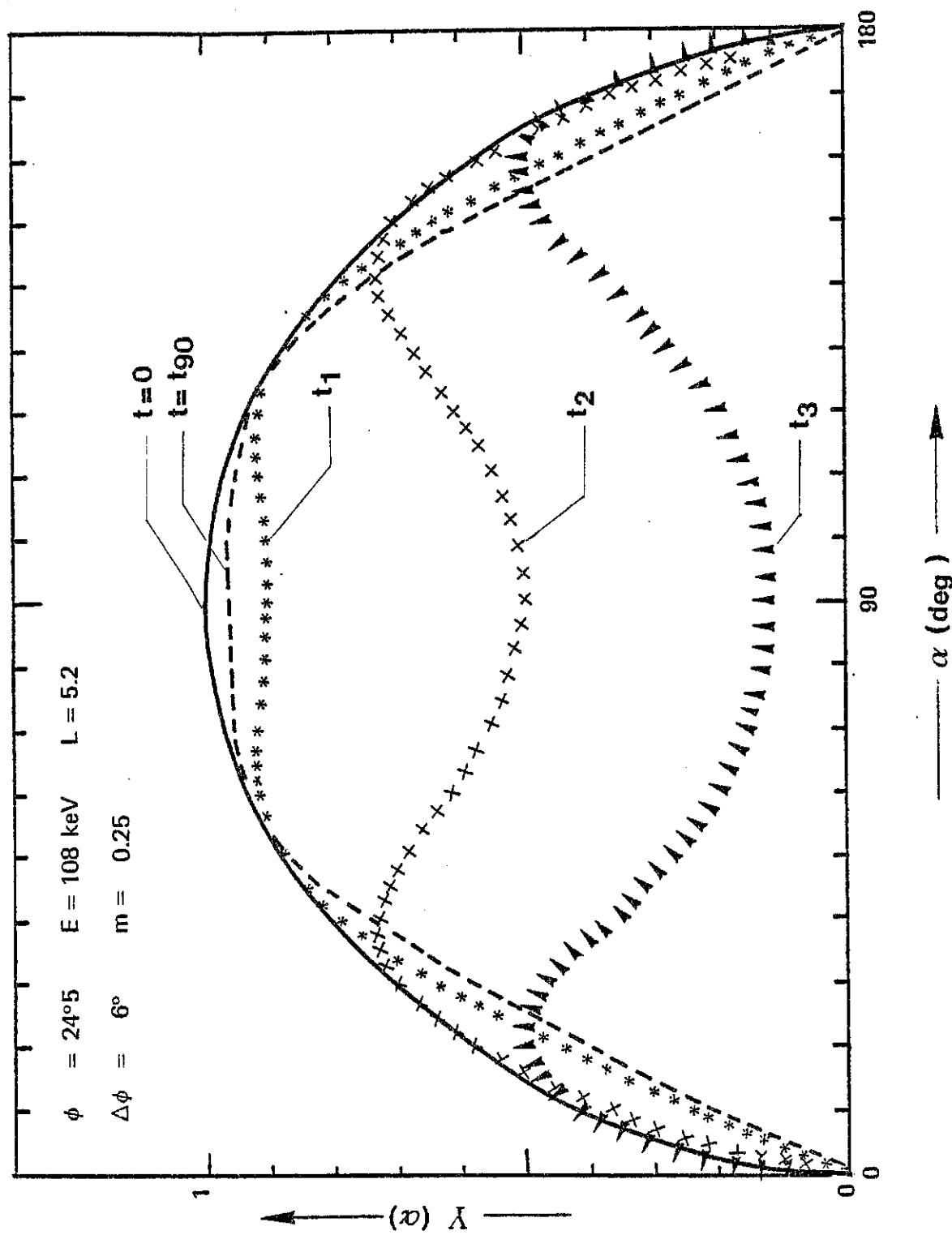


Fig. 12

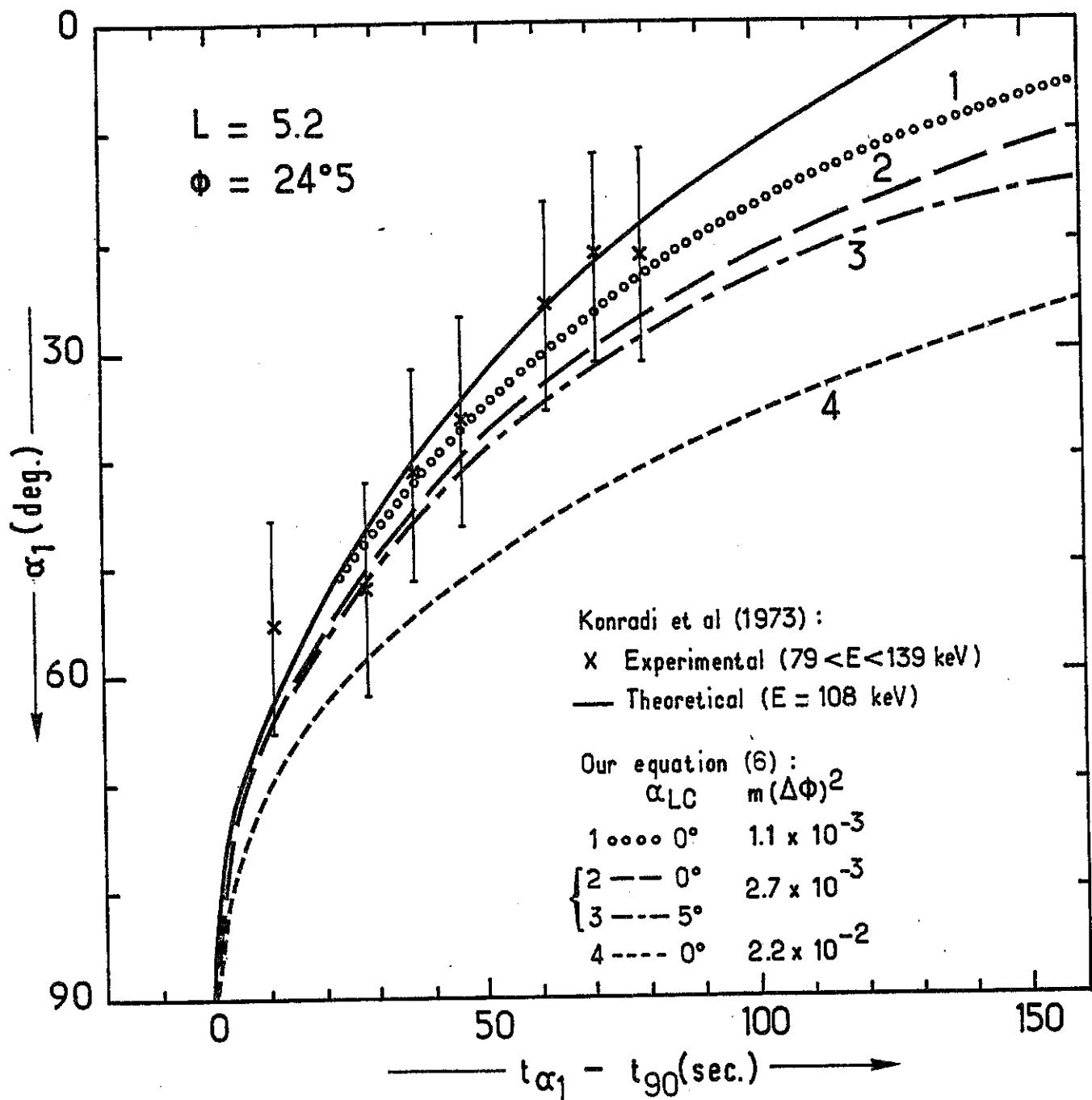


Fig. 13

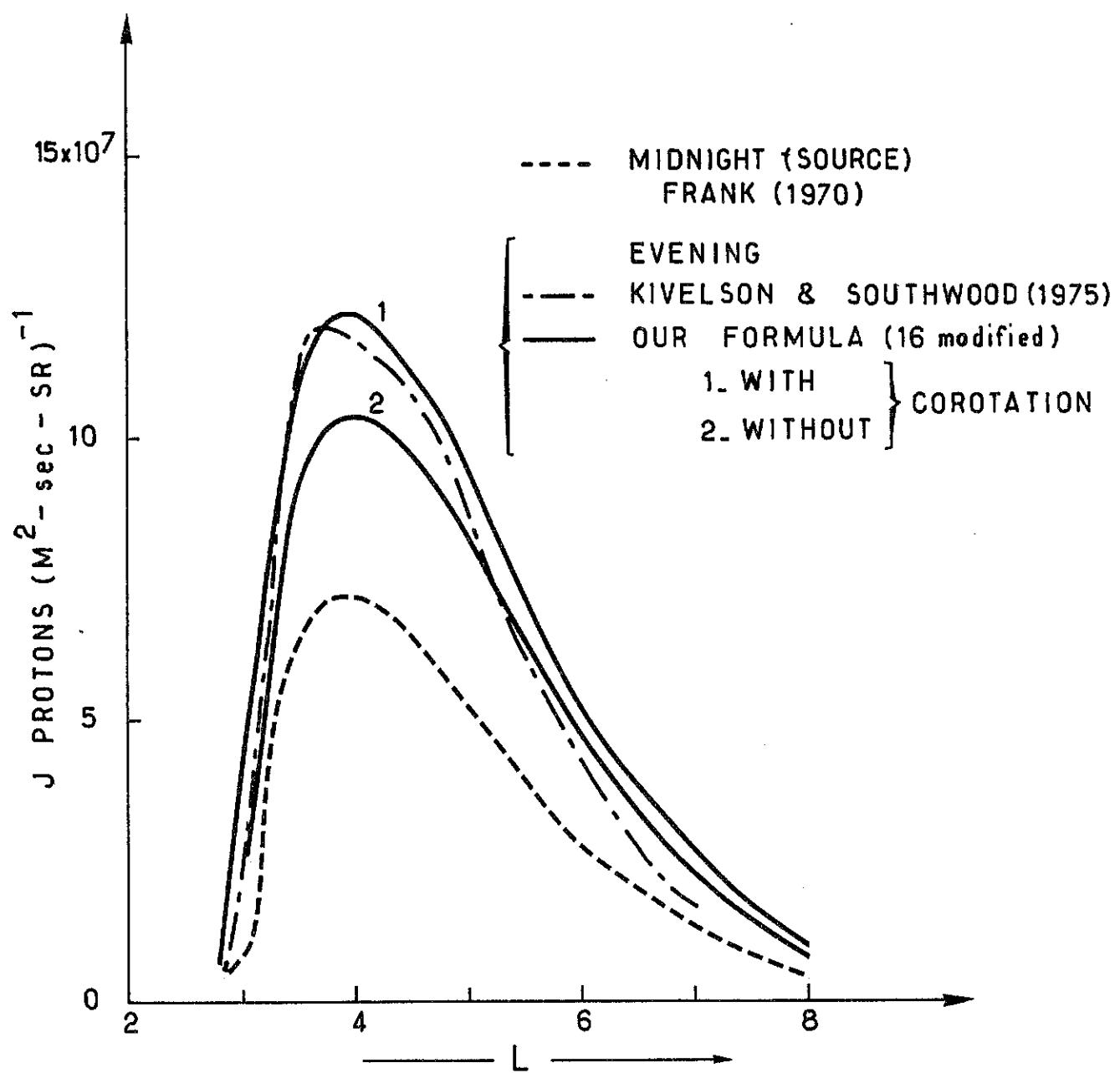


Fig. 14 -

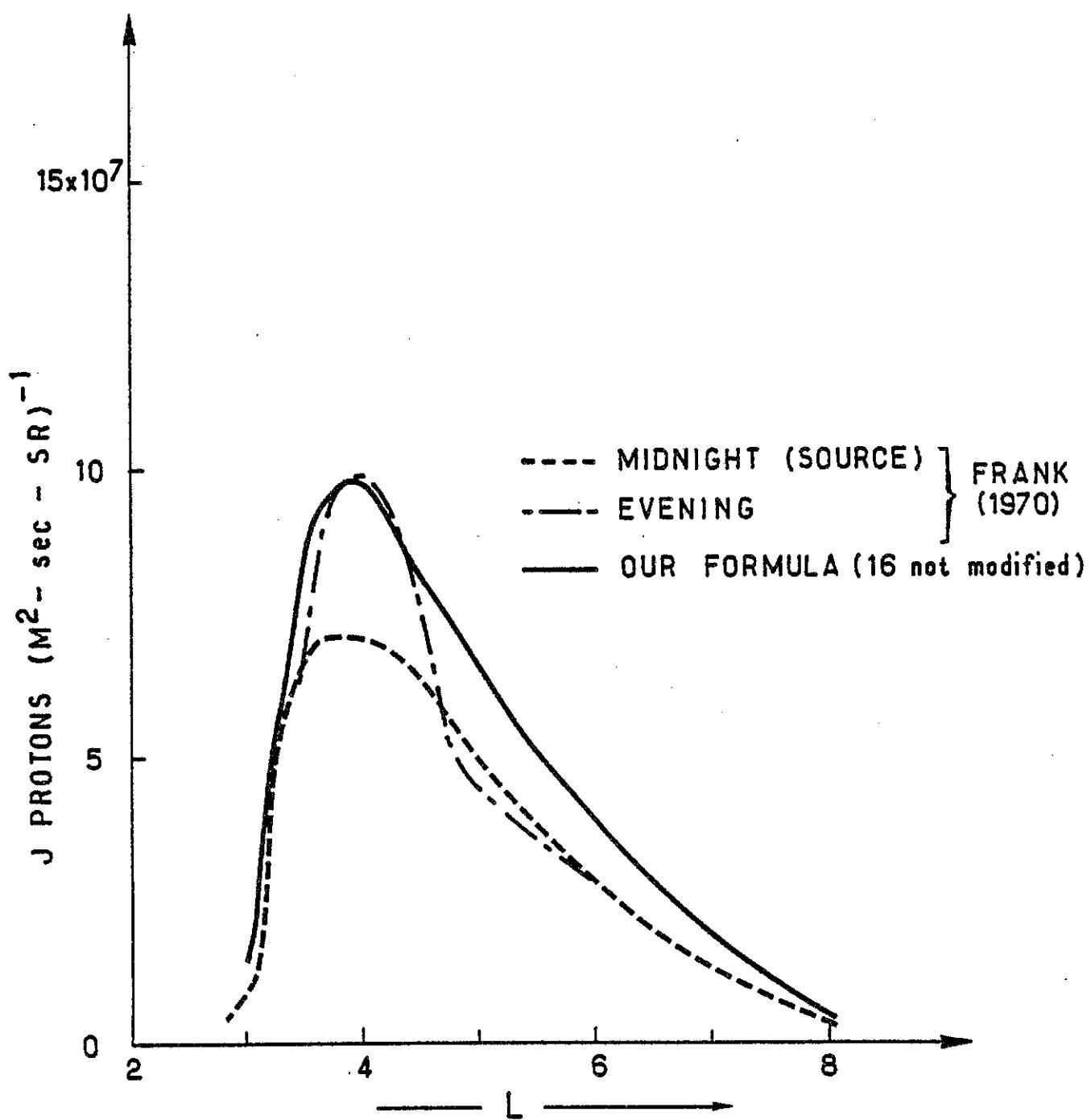


Fig. 15

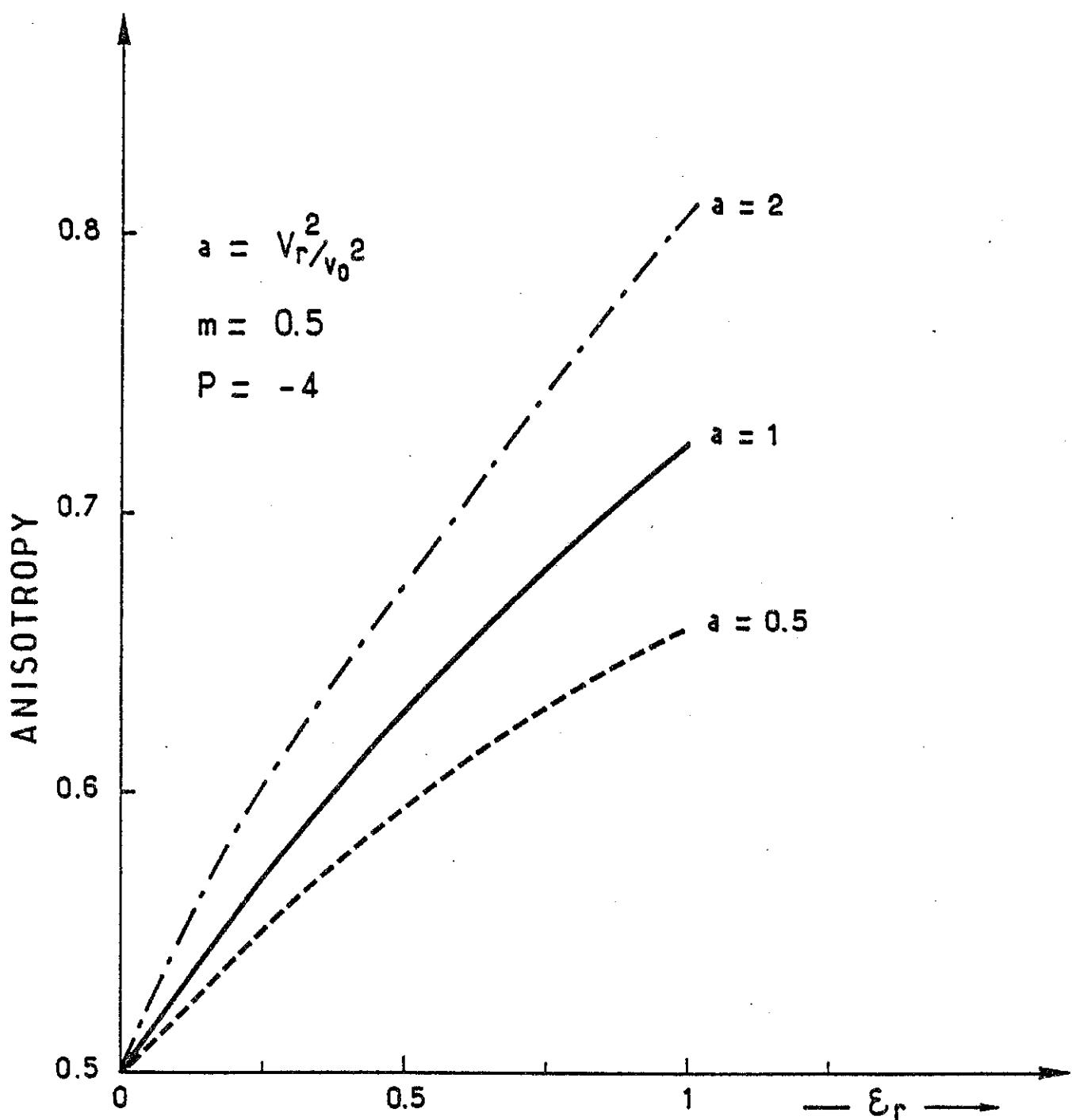


Fig. 16

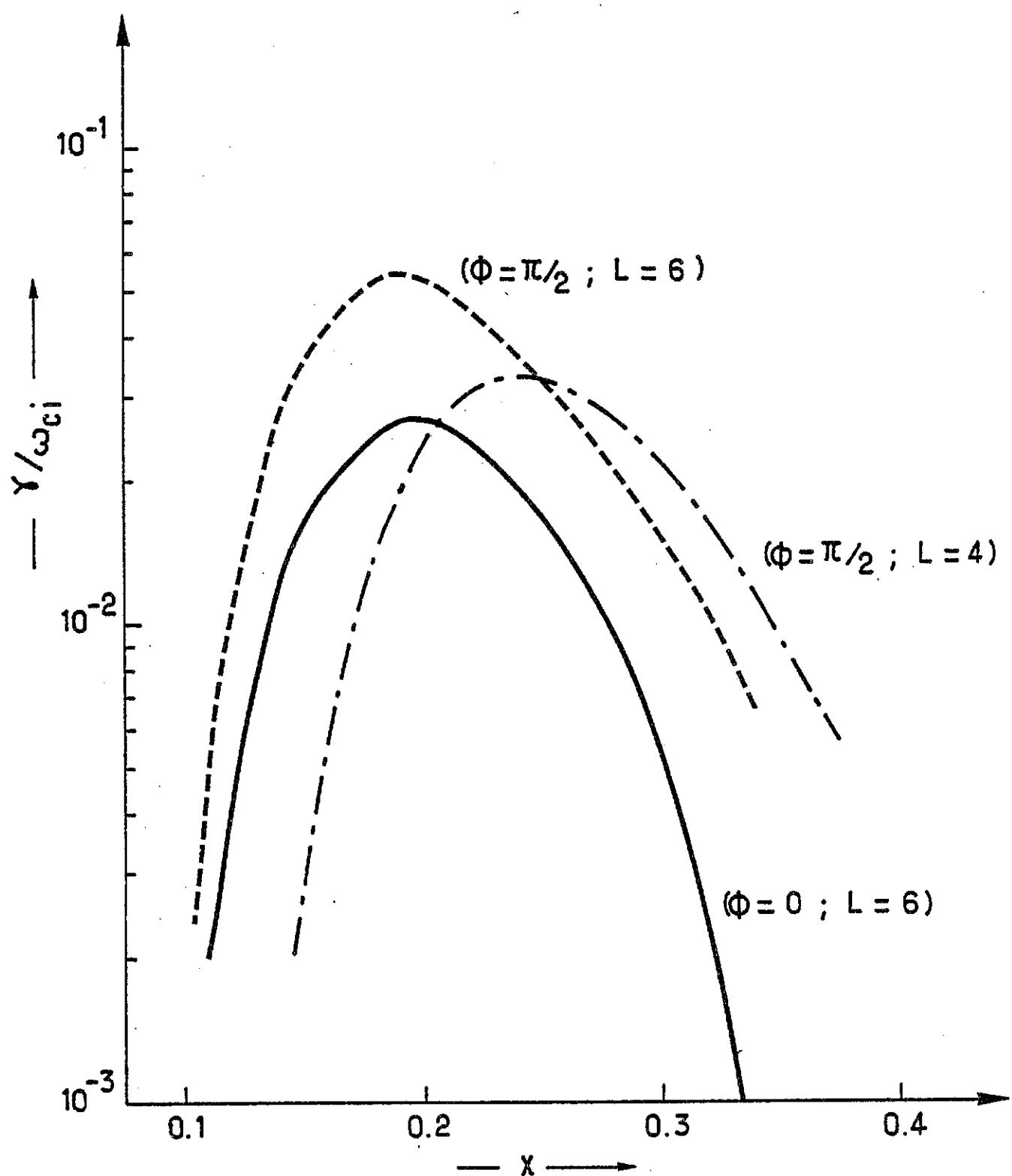
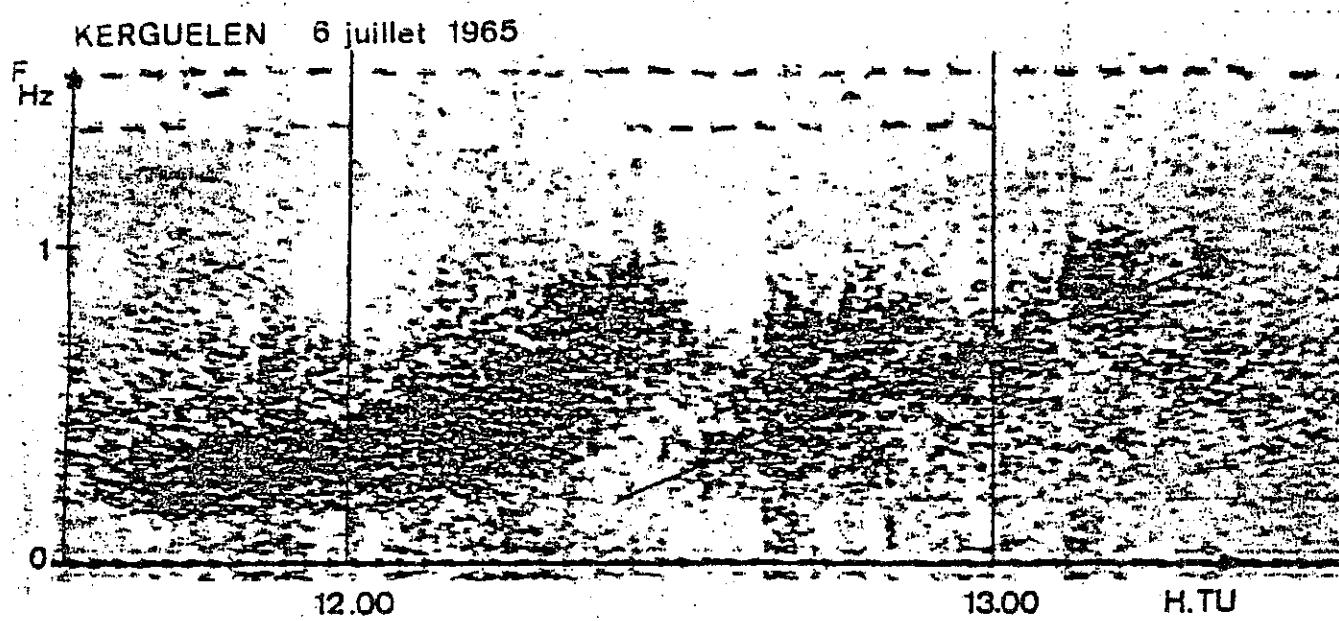


Fig. 17



Sonogramme d'I.P.D.P.

Fig. 18

Mécanismes non linéaires associés aux interactions ondes-particules dans la magnétosphère

par A. ROUX et J. SOLOMON,

Groupe de Recherches Ionosphériques,
94 - Saint-Maur.

RÉSUMÉ. — On déduit du système couplé des équations de Vlasov et de Maxwell une théorie non linéaire, exacte à l'ordre deux, qui décrit l'interaction d'un plasma homogène infini avec une onde électromagnétique transverse, polarisée circulairement, se propageant parallèlement au champ magnétique statique.

Cette déduction permet d'écrire les conditions de validité de la théorie quasi linéaire ; on les exprime en termes de largeur de spectre et d'amplitude maximale des ondes émises. On montre, à partir de ces critères, que le bruit T.B.F. à large bande du type « souffle » peut être expliqué par la théorie quasi linéaire, mais que les émissions U.B.F. en « perles » du type « Pc 1 » doivent, en général, être abordées par une théorie différente : la théorie monochromatique.

L'amplitude à saturation des ondes dans les deux cas est également calculée ; les ordres de grandeur obtenus sont en bon accord avec les données expérimentales.

ABSTRACT. — From the Maxwell-Vlasov coupled equations, we deduce a non-linear theory, which is exact to the second order; it describes the interaction of an infinite homogeneous plasma with a transverse electromagnetic wave, circularly polarized, propagating along the static magnetic field.

Such a deduction enables us to write validity conditions for the quasi-linear theory; they are expressed as functions of the spectrum width, and maximal amplitude of the emitted waves. We show, from these criteriums, that the V.L.F. noise with large bandwidth of the "hiss" type can be explained by the quasi-linear theory, but U.L.F. emission in the P_c 1 range (the so-called "pearls") must be described by a different theory: the monochromatic theory.

The saturation amplitude of the waves in both cases are calculated; the orders of magnitude are in good agreement with experimental data.

INTRODUCTION

On s'intéresse à des ondes électromagnétiques transverses polarisées circulairement qui se propagent parallèlement au champ magnétique statique terrestre B_0 ; on admet généralement que ce type d'onde, qui décrit correctement les émissions T.B.F. et U.B.F., est engendré par instabilité cyclotronique dans la

magnétosphère. Dans cette étude, nous nous limiterons au cas où la gyrofréquence électronique ω_{ce} est très inférieure à la fréquence plasma électronique ω_{pe} ; cette inégalité forte est valable dans la magnétosphère interne, pourvu que l'on ne s'approche pas trop de l'ionosphère des régions polaires. Le milieu est supposé homogène et infini.

Le taux d'amortissement ou d'instabilité linéaire

γ_L des ondes peut être obtenu en linéarisant l'équation de Vlasov [SAGDEEV et SHAFRANOV, 1961 ; BELL et BUNEMANN, 1964 ; LIEMOHN, 1967]. Les résultats ainsi obtenus ne sont valables que sur un temps

$$t < t_L = \frac{1}{\gamma_L}$$

Au bout d'un temps $t = t_L$, il est nécessaire de prendre en compte la réaction des ondes sur les particules, ou les éventuels mécanismes de couplage et de désintégration d'ondes. Ces effets non linéaires sont décrits à partir de l'équation de Vlasov que l'on résoudra par une méthode itérative ; en fait, on se contentera d'étudier les effets qui apparaissent à l'ordre deux : couplages à trois ondes, théorie quasi linéaire et théorie monochromatique.

La théorie quasi linéaire de ce type d'instabilité a déjà fait l'objet de plusieurs études ; ANDRONOV et TRAKHGTENGERTS [1964] l'ont abordée pour la première fois, KENNEL et PETCHEK [1966] ont montré que la théorie quasi linéaire appliquée aux électrons et aux ondes T.B.F. permettait de calculer un flux limite de particules confinées dans la magnétosphère, GENDRIN [1968] a étudié la diffusion des protons sous l'action des ondes hydromagnétiques U.B.F. L'objet de cet article est de développer certains aspects de la théorie quasi linéaire, et surtout de préciser son domaine d'application ; il s'avère que pour des émissions à spectre étroit et intense, la théorie quasi linéaire n'est plus valable : il est alors indispensable de faire appel à la théorie monochromatique.

En négligeant les couplages de modes (ce qui sera justifié dans l'appendice), on établit, dans la première partie, une théorie non linéaire exacte à l'ordre deux de l'équation de Vlasov et l'on en déduit les conditions de validité de la théorie quasi linéaire.

La deuxième partie est consacrée à l'étude du mouvement d'une particule sous l'effet conjugué d'une onde électromagnétique monochromatique d'amplitude finie et d'un champ magnétique statique ; on met en évidence le mécanisme de « piégeage » : oscillation de la particule dans les puits de potentiel de l'onde. La théorie monochromatique de l'instabilité cyclotronique est ensuite abordée.

Dans la troisième partie, on applique les résultats précédents à des cas d'intérêt géophysique, et l'on montre que suivant l'amplitude et la largeur du spectre observé au sol, on doit invoquer la théorie quasi linéaire ou la théorie monochromatique.

Dans la quatrième partie, on étudie les niveaux maximaux de champs admissibles, d'une part, en théorie monochromatique et, d'autre part, en théorie quasi linéaire ; dans ce dernier cas, on donne une expression liant la distribution spectrale des ondes à l'anisotropie et à la vitesse résonnante.

Cherchant à décrire l'émission des ondes, on s'intéressera plus spécialement au cas instable, ce qui implique, puisque la température perpendiculaire est supérieure à la température parallèle, comme le montrent les mesures effectuées en satellite, que l'on s'attache aux interactions $e - R$ et $p - L$ plutôt qu'aux interactions $e - L$ et $p - R$ qui sont amorties lorsque l'anisotropie est dans la direction des vitesses perpendiculaires. Il est donc raisonnable de penser que le « souffle » observé dans le domaine des T.B.F. est émis au cours d'une interaction $e - R$, et que les émissions U.B.F. du type Pc 1 résultent d'une interaction $p - L$. Ces hypothèses, qui ne sont pas cruciales pour le principe des calculs, permettent de simplifier l'exposé des implications géophysiques respectives de la théorie monochromatique et de la théorie quasi linéaire.

PREMIÈRE PARTIE

Théorie non linéaire exacte et conditions de validité de la théorie quasi linéaire

Nous allons développer, à partir de l'équation de Vlasov, une théorie non linéaire exacte des interactions ondes-particules, qui va nous permettre de faire apparaître les conditions de validité de la théorie quasi linéaire.

Si, pour un plasma donné, le nombre de particules N_D dans la sphère de Debye vérifie :

$$N_D \gg 1$$

et si, d'autre part, les phénomènes de collisions binaires sont négligeables, l'équation de Vlasov peut s'appliquer à ce plasma. Ceci est le cas du plasma magnétosphérique, auquel nous nous intéressons ici.

Nous écrirons donc :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{q}{m} (\vec{E} + \vec{V} \Lambda \vec{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{V}} = 0 \quad (1.1)$$

où $f(\vec{r}, \vec{V}, t)$ est la fonction de distribution d'une espèce de particules. Supposons que le milieu considéré, initialement homogène, subisse une petite perturbation. Nous traduisons ceci par :

$$f(\vec{r}, \vec{V}, t) = F_0(\vec{V}) + f^{(1)}(\vec{r}, \vec{V}, t) \text{ avec } f^{(1)} \ll F_0$$

où $F_0(\vec{V})$ représente la partie homogène de la fonction de distribution et $f^{(1)}$ la perturbation. De même

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + E^{(1)}(\vec{r}, t) \quad \vec{B} = \vec{B}_0 + B^{(1)}(\vec{r}, t)$$

où \vec{E}_0 et \vec{B}_0 sont des champs statiques existant avant perturbation.

Développons les quantités perturbées en série de Fourier par rapport à l'espace :

$$\left. \begin{aligned} f(\vec{r}, \vec{v}, t) &= F_0(\vec{V}) + \sum_k f_k(\vec{V}, t) e^{-ik \cdot \vec{r}} \\ \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 + \sum_k \vec{E}_k(t) e^{-ik \cdot \vec{r}} \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{B}_0 + \sum_k \vec{B}_k(t) e^{-ik \cdot \vec{r}} \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

ou $f_k = f_{-k}$ et $\vec{E}_k = \vec{E}_{-k}^*$

avec $|\vec{k}| = n \frac{2\pi}{L}$ où L est la dimension de la « boîte »

dans laquelle est enfermé le système (n entier positif, négatif ou nul).

Nous pourrons ensuite, si nécessaire, faire tendre L vers l'infini, pour passer à un spectre continu et à l'intégrale de Fourier. Portant les relations (1.2) dans (1.1), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_k}{\partial t} - ik \cdot \vec{V} f_k + \frac{q}{m} (\vec{E}_0 + \vec{V} \Lambda \vec{B}_0) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial \vec{V}} \\ + \frac{q}{m} (\vec{E}_{+k} + \vec{V} \Lambda \vec{B}_{+k}) \cdot \frac{\partial F_0}{\partial \vec{V}} \\ = - \frac{q}{m} \sum_{k'} (\vec{E}_{k-k'} + \vec{V} \Lambda \vec{B}_{k-k'}) \cdot \frac{\partial f_{k'}}{\partial \vec{V}} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Introduisons les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{k} \parallel \vec{B}_0 \parallel 0\vec{Z} &\quad \text{c.à.d. propagation longitudinale} \\ \vec{E}^{(1)} \perp \vec{k} \quad \vec{B}^{(1)} \perp \vec{k} &\quad \text{c.à.d. ondes transverses} \end{aligned}$$

Nous supposons $\vec{E}_0 = 0$ et la polarisation circulaire. L'équation (1.3) devient donc, pour $k \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_k}{\partial t} - ik V_z f_k + \frac{q}{m} (\vec{V} \Lambda \vec{B}_0) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial \vec{V}} \\ + \frac{q}{m} (\vec{E}_{+k} + \vec{V} \Lambda \vec{B}_k) \cdot \frac{\partial (F_0 + f_0)}{\partial \vec{V}} \\ = - \frac{q}{m} \sum_{k' \neq 0} (\vec{E}_{k-k'} + \vec{V} \Lambda \vec{B}_{k-k'}) \cdot \frac{\partial f_{k'}}{\partial \vec{V}} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Le dernier terme (1.4) est le terme de couplage des modes.

Dans le cas de la magnétosphère où

$$\omega_{pe} \gg \omega_{ce}$$

(ω_{pe} fréquence plasma électronique et ω_{ce} fréquence cyclotronique électronique) et en propagation longitudinale ($\vec{k} \parallel \vec{B}_0$), il n'y a pas de couplage à trois ondes (cf. appendice). Les couplages suivants, s'ils

existent, sont en $|E|^3$. Nous les négligerons à l'ordre où nous travaillons. Donc pour $k \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_k}{\partial t} - ikV_z f_k + \frac{q}{m} (\vec{V} \Lambda \vec{B}_0) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial \vec{V}} \\ + \frac{q}{m} (\vec{E}_k + \vec{V} \Lambda \vec{B}_k) \cdot \frac{\partial (F_0 + f_0)}{\partial \vec{V}} = 0 \quad (1.5) \end{aligned}$$

Pour $k = 0$ d'après (1.3), nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{q}{m} (\vec{V} \Lambda \vec{B}_0) \cdot \frac{\partial (F_0 + f_0)}{\partial \vec{V}} + \frac{q}{m} \Sigma_k (\vec{E}_{-k} + \vec{V} \Lambda \vec{B}_{-k}) \\ \times \frac{\partial f_k}{\partial \vec{V}} = 0 \quad (1.6) \end{aligned}$$

Remarquons que le phénomène linéaire, qui intervient au premier ordre, se traduit par la création par le plasma d'une onde croissante en $e^{\gamma t}$, γ étant un coefficient d'amplification fonction uniquement de ω (une fois la fonction de distribution homogène donnée). Tout ceci est déduit de l'équation (1.5). La théorie devient non linéaire lorsque l'on introduit en plus la modification, au cours du temps, de la fonction de distribution par les ondes créées. Dans ce cas, le coefficient d'amplification γ devient fonction du temps.

Ce n'est que dans ce cadre que l'on peut espérer la stabilisation du phénomène, le coefficient d'amplification décroissant au cours du temps et finissant par s'annuler ou même devenant négatif. Ce mécanisme résulte du couplage des équations (1.5) et (1.6).

Pour continuer les calculs, nous introduisons le changement de variables suivant dans l'espace des vitesses :

$$\begin{aligned} V_x &= V_{\perp} \cos \phi \\ V_y &= V_{\perp} \sin \phi \\ V_z &= V_{||} \end{aligned} \quad (1.7)$$

De plus, nous écrivons :

$$\begin{aligned} E_k(t) &= \widehat{E}_k(t) e^{i\omega_k t} \\ B_k(t) &= \widehat{B}_k(t) e^{i\omega_k t} \end{aligned} \quad (1.8)$$

et nous admettons que ces grandeurs ont une largeur finie égale à Δk .

Nous reviendrons sur cette hypothèse qui consiste à séparer l'oscillation rapide du champ, caractérisée par ω_k , et l'évolution lente de son amplitude.

L'équation $\vec{\nabla} \Lambda \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ nous donne
 $\vec{k} \Lambda \vec{E}_k = \omega_k \vec{B}_k \quad (1.9)$

ce qui permet de remplacer \vec{B}_k par \vec{E}_k dans les équations.

Nous avons négligé dans l'équation (1.9) $\frac{\partial B_k}{\partial t}$ qui reviendrait à remplacer ω par un terme du type $\omega_k - i\gamma_k$; ce terme supplémentaire ne donne pas de contribution à l'évolution de la partie résonnante de la fonction de distribution. On peut s'en assurer en refaisant le calcul de l'équation de diffusion (1.16) compte tenu de ce terme supplémentaire.

Posons aussi :

$$F_0(\vec{V}) + f_0(\vec{V}, t) = G_0(\vec{V}, t) \quad (1.10)$$

En utilisant (1.7), (1.9), (1.10), il est facile de mettre les équations (1.5) et (1.6) [GENDRIN, 1968] sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_k}{\partial t} - (ikV_{||} \pm i\omega_c)f_k \\ = - \frac{q}{2m} [E_k^+ e^{-i\phi} + E_k^- e^{+i\phi}] A_k G_0 \quad (1.11) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} = \\ - \Sigma_k \frac{q}{2m} [E_k^+ e^{-i\phi} (A_k - iB_k) + E_k^- e^{+i\phi} (A_k + iB_k)] f_{-k} \quad (1.12) \end{aligned}$$

où nous avons posé

$$E^{\pm} = E_x \pm iE_y$$

et

$$A_k = \left(1 - \frac{kV_{||}}{\omega} \right) \frac{\partial}{\partial V_{\perp}} + \frac{kV_{\perp}}{\omega} \frac{\partial}{\partial V_{||}}$$

$$B_k = \frac{1}{V_{\perp}} \left(1 - \frac{kV_{||}}{\omega} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} = C_k \frac{\partial}{\partial \phi}$$

Intégrons (1.11) comme une équation différentielle en $f_k(t)$, avec second membre

$$f_k(t) = f_k(t=0) e^{i(kV_{||} \pm \omega_c)t} - \frac{q}{2m} e^{i(kV_{||} \pm \omega_c)t} \int_0^t e^{-i(kV_{||} \pm \omega_c)t'} [Z] A_k G_0 dt' \quad (1.13)$$

avec

$$[Z] = E_k^+ e^{-i\phi} + E_k^- e^{+i\phi}$$

Nous pouvons remplacer dans (1.12) f_k par son expression donnée par (1.13). Nous effectuons la moyenne de l'expression trouvée sur ϕ et nous obtenons, en négligeant le terme de condition initiale, en utilisant (1.8) et en supposant que G_0 ne dépend pas de ϕ , ce qui est une hypothèse raisonnable :

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{q^2}{4m^2} \sum_k (A_k + C_k)$$

$$\left[\widehat{E}_k^+(t) \int_0^t e^{i(kV|| - \omega_c - \omega_k)(t' - t)} \widehat{E}_{-k}(t') A_k G_0(t') dt' \right.$$

$$\left. + \widehat{E}_k^-(t) \int_0^t e^{i(kV|| + \omega_c - \omega_k)(t' - t)} \widehat{E}_{-k}^+(t') A_k G_0(t') dt' \right]$$

Posons $t - t' = \tau$, nous obtenons

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} (V_\perp, V_{||}, t) = \frac{q^2}{4m^2} \sum_k (A_k + C_k)$$

$$\times \left[\widehat{E}_k^+(t) \int_0^t e^{-i(kV|| - \omega_c - \omega_k)\tau} \widehat{E}_{-k}(t - \tau) A_k G_0 d\tau \right.$$

$$\left. + \widehat{E}_{-k}^-(t) \int_0^t e^{-i(kV|| + \omega_c - \omega_k)\tau} \widehat{E}_{-k}^+(t - \tau) A_k G_0(t - \tau) d\tau \right] \quad (1.14)$$

En remplaçant la sommation sur k par une intégrale et en inversant les intégrations en τ et en k , on obtient des intégrales de la forme :

$$\int_0^t \left[\int_{-\infty}^{+\infty} (A_k + C_k) \widehat{E}_k^+(t) e^{-i(kV|| - \omega_c - \omega_k)\tau} \right.$$

$$\left. \widehat{E}_{-k}(t - \tau) A_k G_0(t - \tau) dk \right] d\tau$$

L'intégrand, dont la dépendance par rapport à k est commandée par E_k , aura donc Δk comme largeur. Par conséquent, sa transformée de Fourier aura une largeur en temps égale à

$$\Delta\tau \sim \frac{1}{|V_{||}| \Delta k}$$

à condition que les temps caractéristiques d'évolution τ_F et τ_{G_0} du champ électrique et de la partie homogène de la fonction de distribution vérifient :

$$\tau_E \text{ et } \tau_{G_0} \gg \Delta\tau = \frac{1}{|V_{||}| \Delta k}$$

Dans le cas où ces conditions sont vérifiées, nous pouvons écrire, dans l'intégrale portant sur τ :

$$\widehat{E}_{-k}(t - \tau) A_k G_0(t - \tau) \simeq \widehat{E}_{-k}(t) A_k G_0(t).$$

Compte tenu du fait que

$$E_k^+ E_{-k}^- = |E_k^+|^2$$

et

$$E_k^- E_{-k}^+ = |E_k^-|^2$$

nous pouvons donc écrire (1.14) sous la forme :

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{q^2}{4m^2} \sum_k (A_k + C_k)$$

$$\times \left[|E_k^+(t)|^2 A_k G_0(t) \int_0^t e^{-i(kV|| - \omega_c - \omega_k)\tau} d\tau \right.$$

$$\left. + |E_k^-(t)|^2 A_k G_0(t) \int_0^t e^{-i(kV|| + \omega_c - \omega_k)\tau} d\tau \right]$$

Puisque le temps d'oscillation de l'exponentielle est petit devant le temps caractéristique de variation de E et G_0 , nous pouvons considérer que pour l'intégrale le temps $t \rightarrow \infty$

Or

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-i(kV|| - \omega_c - \omega_k)\tau} d\tau = \frac{1}{i} P \frac{1}{kV_{||} - \omega_c - \omega_k}$$

$$+ \pi \delta(kV_{||} - \omega_c - \omega_k)$$

La partie principale disparaît à cause de la sommation sur k . Il reste donc

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \pi \frac{q^2}{4m^2} \sum_k (A_k + C_k) |E_k^+(t)|^2 \delta(kV_{||} - \omega_c - \omega_k) A_k G_0(t) \quad (1.16)$$

C'est l'équation de diffusion quasi linéaire. Elle donne en particulier comme résultat la diffusion en « angle d'attaque » des particules. Pour obtenir l'équation (1.16), nous avons dû faire les hypothèses suivantes, d'après (1.15) :

$$\tau_{G_0} \gg \frac{1}{|V_{||}| \Delta K} \quad (1.17)$$

$$\tau_E \gg \frac{1}{|V_{||}| \Delta K} \quad (1.18)$$

Ce sont les conditions de validité de la théorie quasi linéaire. Cette théorie n'est plus valable lorsque $\Delta K \rightarrow 0$, c'est-à-dire si le spectre des ondes est très étroit. Il est alors nécessaire d'élaborer une autre théorie : la théorie en onde monochromatique, qui se base sur des hypothèses différentes.

DEUXIÈME PARTIE

Aperçu d'une théorie monochromatique

Position du problème

On vient de voir que lorsque $\Delta K \rightarrow 0$, la théorie quasi linéaire n'est plus applicable, ce qui nous conduit à envisager le cas d'une onde monochromatique. Les particules, dont la composante parallèle de la vitesse satisfait la condition de résonance

$$\omega - kv_{||} = |\omega_c|$$

voient, dans leurs propres repères, le champ électromagnétique tourner avec une fréquence de rotation égale à la fréquence gyromagnétique. Le champ électrique de l'onde accélère ou décélère les particules résonnantes (suivant la phase relative de l'onde et des particules), entraînant ainsi une modification de la composante perpendiculaire de leurs vitesses. Le champ magnétique de l'onde, lui, change également la vitesse parallèle des particules ; la condition de résonance cesse alors d'être remplie, une particule initialement en phase avec le champ électrique, donc accélérée, est maintenant décélérée : on va constater que l'échange d'énergie n'a plus lieu entre l'onde et les particules mais entre l'énergie parallèle et l'énergie perpendiculaire. On étudie d'abord le mouvement individuel d'une particule soumise à l'action d'une onde électromagnétique d'amplitude finie dont le vecteur de propagation est parallèle au champ magnétique statique, on en déduit la fréquence du piégeage : fréquence d'oscillation des particules dans les puits de potentiel de l'onde. Ce traitement, contrairement à ceux de ROBERTS et BUCHSBAUM [1964] et de SCHRAM [1967] est fondé sur l'utilisation des intégrales premières du mouvement, ce qui permet un calcul plus aisés ; en outre, pour simplifier le calcul, on se place dans un cadre non relativiste.

On transpose ensuite les résultats obtenus au cas collectif décrit par l'équation de Vlasov ; le problème stationnaire a été décrit par BROISSIER [1964] ; l'auteur montre que les solutions peuvent alors se mettre sous la forme de « modes de particules piégées » analogues à ceux trouvés dans le cas électrostatique, par BERNSTEIN et al. [1958] (ces « modes de particules piégées » sont sans rapport avec ce que l'on a coutume d'appeler « mode de Bernstein »).

Mise en équation

Le mouvement d'une particule soumise à l'action d'un champ électromagnétique oscillant (E_1 , B_1) et

d'un champ magnétique statique (B_0) est régi par les équations

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{q}{m} (\vec{E}_1 + \vec{V} \Lambda \vec{B}_1) + \frac{q}{m} (\vec{V} \Lambda \vec{B}_0) \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \Lambda \vec{E}_1 = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.2)$$

Dans le cas particulier d'une onde polarisée circulairement se propageant parallèlement au champ magnétique statique, on peut faire le choix suivant :

$$E_{\text{statique}} = 0 \quad k = k_z > 0$$

$$\begin{cases} B_x = B_1 \sin(\omega t - kz) \\ B_y = B_1 \cos(\omega t - kz) \\ B_z = B_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

On déduit de (2.2) et (2.3) que

$$\begin{cases} E_x = \frac{\omega}{k} B_z \\ E_y = -\frac{\omega}{k} B_x \\ E_z = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

L'indice de réfraction pour les ondes UBF et TBF est grand devant l'unité, sauf dans certaines régions de l'ionosphère (ionosphère polaire en particulier), donc $V_\phi = \omega/k \ll c$. On supposera, aux fins de simplification que la vitesse de la particule est également non relativiste. (Il est néanmoins intéressant de noter que dans le cas où $V_\phi = c$, la variation relativiste de la masse compense exactement l'effet du champ magnétique de l'onde [DAVYDOVSKII, 1963 ; ROBERTS et BUCHSBAUM, 1964].

Plaçons-nous dans un repère mobile se déplaçant à la vitesse de phase de l'onde. Soit W la vitesse de la particule dans ce repère, on a donc

$$\begin{cases} W_x = V_x \\ W_y = V_y \\ W_z = V_z - V_\phi \\ Z' = Z - V_\phi t \end{cases}$$

Compte tenu de l'hypothèse $V_\phi \ll c$ et de (2.4), la transformation de Lorentz appliquée aux champs E_1 et B_1 donne

$$\begin{cases} B'_x = B_x \\ B'_y = B_y \\ E'_x = E_x - V_\phi B_y = 0 \\ E'_y = E_y + V_\phi B_x = 0 \end{cases}$$

Ω_0 et Ω_1 sont les fréquences gyromagnétiques associées à B_0 et B_1 , l'équation du mouvement peut s'écrire :

$$\frac{dW_x}{dt} = W_y \Omega_0 - W_z \Omega_1 \cos kZ' \quad (2.5)$$

$$\frac{dW_y}{dt} = W_z \Omega_1 \sin kZ' - W_x \Omega_0 \quad (2.6)$$

$$\frac{dW_z}{dt} = \Omega_1 (W_x \cos kZ' - W_y \sin kZ') \quad (2.7)$$

On en déduit trois intégrales premières du mouvement

$$T = W_{||}^2 + W_\perp^2 \quad (2.8)$$

$$S = \left(W_{||} - \frac{\Omega_0}{k} \right)^2 - \frac{2\Omega_1}{k} W_\perp \sin(\phi + kZ') \quad (2.9)$$

$$U = kr^2(\phi + \Omega_0) + \Omega_1 r \cos(kZ' + \phi) - W_{||} \quad (2.10)$$

avec

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ W_{||} = W_z \end{cases} \quad \begin{cases} W_x = W_\perp \cos \phi \\ W_y = W_\perp \sin \phi \end{cases}$$

La signification physique de (2.8) est évidente ; elle exprime la conservation de l'énergie cinétique dans le repère de l'onde. La relation (2.9) nous permettra de mettre en évidence un terme oscillant dans la vitesse parallèle ; cette oscillation est l'objet de notre étude. On n'utilisera pas ici l'expression (2.10)

Posons

$$v = W_{||} - \frac{\Omega_0}{k}$$

où v représente l'écart à la résonance ; S et T s'écrivent alors en posant :

$$\psi = kz' + \phi$$

$$T = W_\perp^2 + \left(v + \frac{\Omega_0}{k} \right)^2 \quad (2.11)$$

$$S = v^2 - \frac{2\Omega_1}{k} W_\perp \sin \psi \quad (2.12)$$

Pour décrire le mouvement de la particule, on exprime les équations différentielles (2.5) et (2.6)

en fonction des intégrales premières (2.8) et (2.9). Il est impossible de trouver une expression analytique de z et v en fonction du temps [ROBERTS et BUCHSBAUM, 1964]. On se contentera de faire le calcul dans deux approximations diamétralement opposées, suivant que la valeur initiale de W_\perp est faible ou importante. Supposons tout d'abord que

$$W_\perp^2(t=0) \gg v^2$$

et

$$W_\perp^2(t=0) \gg 2v \frac{\Omega_0}{k}$$

(2.11) et (2.12) s'écrivent alors :

$$T \simeq W_\perp^2 + \left(\frac{\Omega_0}{k} \right)^2 \quad (2.13)$$

$$S = v^2 - \frac{2\Omega_1}{k} W_\perp \sin \psi \quad (2.14)$$

ce qui, reporté dans (2.7), donne

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \Omega_1 W_\perp \cos \psi \\ &= \frac{k}{2} \left\{ \left(\frac{2\Omega_1}{k} \right)^2 \left[T - \left(\frac{\Omega_0}{k} \right)^2 \right] - (v^2 - S)^2 \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Posons :

$$\alpha = \frac{2\Omega_1}{k} \left[T - \left(\frac{\Omega_0}{k} \right)^2 \right]^{1/2} \simeq \frac{2\Omega_1}{k} W_\perp(t=0)$$

ce qui permet d'écrire (2.15) sous la forme

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k}{2} [(\alpha + S - v^2)(\alpha - S + v^2)]^{1/2} \quad (2.16)$$

On veut une vitesse réelle, ce qui implique que la quantité

$$P(v) \equiv (\alpha + S - v^2)(\alpha - S + v^2) \geq 0$$

Les racines de ce polynôme sont

$$\begin{cases} v = \pm \sqrt{\alpha + S} \\ v = \pm \sqrt{-\alpha + S} \end{cases}$$

— si $\alpha > S$, $P(v)$ n'a que deux racines réelles $v = \pm \sqrt{\alpha + S}$ et il est positif entre ces racines ;

— si $\alpha < S$, S doit être positif car α est une quantité positive par définition.

Le polynôme $P(v)$ a quatre racines réelles et il est positif dans les domaines suivants :

$$\begin{cases} -\sqrt{\alpha + S} < v < -\sqrt{S - \alpha} \\ \sqrt{S - \alpha} < v < \sqrt{\alpha + S} \end{cases}$$

Nous allons étudier successivement ces deux hypothèses :

Cas $\alpha > S$

$$\text{Posons } \begin{cases} \alpha + S = a^2 \\ \alpha - S = b^2 \end{cases}$$

(2.16) devient

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k}{2} [(a^2 - v^2)(b^2 + v^2)]^{1/2}$$

C'est une équation elliptique, dont la solution peut s'écrire [BLANC, 1937] :

$$v = a \operatorname{cn} u \quad (2.17)$$

cn étant la fonction elliptique d'argument

$$u = \frac{k}{2} \sqrt{a^2 + b^2} t$$

En intégrant par rapport au temps, on obtient la position de la particule dans le repère où $v = 0$

$$\zeta = \pm \frac{2}{k} \left\{ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc sin} |\operatorname{cn} u| \right\} \quad (2.18)$$

L'intégrale elliptique complète de première espèce est définie par :

$$x(\alpha, S) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \frac{\alpha+S}{2\alpha} \sin^2 \theta}} \quad (2.19)$$

Le mouvement de la particule est périodique sauf pour $\alpha = S$. La période de ce mouvement est donnée par

$$4\pi = \frac{k}{2} \sqrt{a^2 + b^2} T$$

d'où

$$T = \frac{4\pi}{\frac{k}{2} \sqrt{2\alpha}}$$

On obtient ainsi la pulsation de piégeage ω

$$\omega \approx \frac{4k}{T} = \frac{\sqrt{4\alpha W_\perp \Omega_1}}{2} = \sqrt{k W_\perp \Omega_1} \quad (2.20)$$

Si $\alpha = S$

$$v = \frac{\sqrt{2\alpha}}{\operatorname{cn} \left(\frac{k}{2} t \sqrt{2\alpha} \right)} \quad (2.21)$$

$$\frac{k\zeta}{2} = \pm \left\{ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc sin} \left[\operatorname{th} \left(\frac{k}{2} t \sqrt{2\alpha} \right) \right] \right\} \quad (2.22)$$

On constate que dans le cas singulier $\alpha = S$, τ et $v \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$.

Revenons au cas $\alpha > S$; lorsque l'amplitude de l'onde croît, la fréquence de piégeage croît comme la racine carrée de cette amplitude. On voit aisément sur l'expression (2.8) qu'il y a échange permanent d'énergie entre le mouvement perpendiculaire et le mouvement parallèle; la trajectoire moyenne de la particule est donnée par le mouvement cyclotronique autour du champ statique B_0 , la trajectoire exacte s'en écarte d'une quantité qui oscille à la fréquence de piégeage. On constate donc que dans ce cas ($\alpha > S$), le champ magnétique de l'onde écarte la particule de la position prévisible en théorie linéarisée ($B_1 = 0$), ce qui détruit la cohérence entre l'onde et la particule, empêchant ainsi le chauffage gyrorésonnant (augmentation indéfinie de w_\perp), Figure 1.

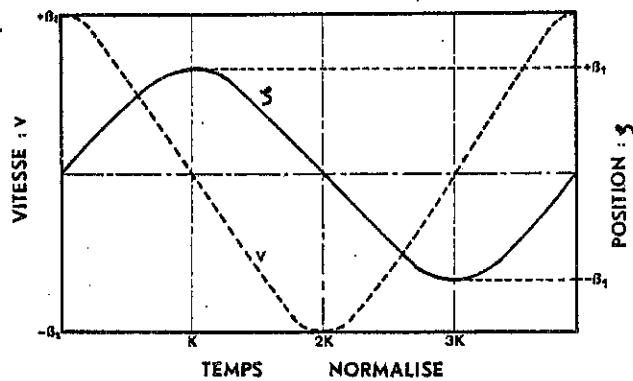


FIG. 1

Cas du piégeage. On représente la position ζ et la vitesse v de la particule dans le repère gyrorésonant en fonction du temps normalisé. [ζ est une intégrale elliptique de première espèce définie par la formule (2.19)]. $\beta_1 = \frac{\pi}{k}$, $\beta_2 = \sqrt{2\alpha}$.

Cas $\alpha < S$

$$\text{Posons } \begin{cases} \alpha - S = -b^2 \\ \alpha + S = a^2 \end{cases}$$

L'équation (2.15) s'écrit :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k}{2} [(a^2 - v^2)(v^2 - b^2)]^{1/2} \quad (2.23)$$

C'est encore une équation elliptique dont la solution est

$$v = \pm a \operatorname{dn} \left(\frac{ka}{2} t \right) \quad (2.24)$$

On obtient ζ par intégration

$$\zeta = \pm \frac{2}{k} am \left[\frac{k}{2} t \sqrt{\alpha + S} \right] \quad (2.25)$$

où $dn(x)$ et $am(x)$ sont des fonctions elliptiques définies dans l'ouvrage de BLANC[1937].

La vitesse de la particule est encore une fonction oscillante du temps, mais elle oscille autour d'une valeur moyenne non nulle. Dans le cas très particulier où la particule se trouve initialement à la résonance ($S = 0$, $\psi(t=0) = 0$) ζ reste nul mais l'amplitude de l'onde étant alors nulle ($0 \leq \alpha < S$) on ne peut espérer conférer de l'énergie de l'onde à la particule. Dans les autres cas, $S \neq 0$, la particule s'éloigne de la région résonnante, sa position moyenne est celle prévisible par la théorie linéaire ($\langle \zeta \rangle = \sqrt{S} t$) le champ de l'onde ayant pour effet de lui communiquer de petites oscillations autour de cette position moyenne. Il n'y a pas de piégeage (Fig. 2).

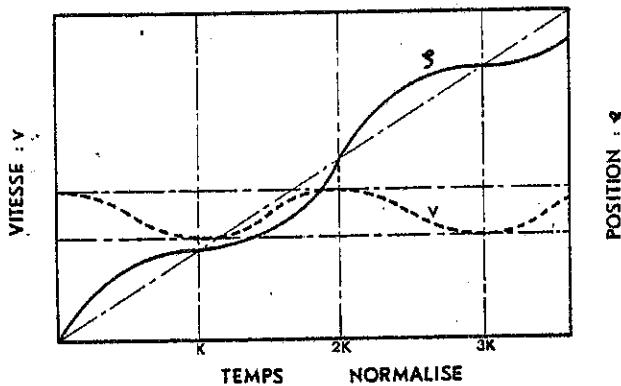


FIG. 2

ζ et v sont la position et la vitesse de la particule dans le repère gyrorésonant. On constate que ζ est une fonction oscillante autour d'une valeur moyenne non nulle, il n'y a plus piégeage.

Hypothèse $W_{\perp}(t=0)$ grand

Examinons de plus près l'hypothèse simplificatrice

$$W_{\perp}^2(t=0) \gg v^2 \text{ et } 2v \frac{\Omega_0}{k}$$

plaçons-nous dans le cas du piégeage ($\alpha > S$). On voit d'après (2.17) que

$$v_{\max}^2 \sim \alpha + S < 2\alpha = \frac{4\Omega_1}{k} W_{\perp}(t=0) \quad (2.26)$$

la plus sévère des conditions est

$$W_{\perp}^2(t=0) \gg 2v \frac{\Omega_0}{k}$$

(en effet, on aura toujours $v \ll \frac{\Omega_0}{k}$) elle s'exprime par :

$$\frac{\Omega_1}{\Omega_0} \ll \left(\frac{kW_{\perp}}{\Omega_0} \right)^3 \quad (2.27)$$

A la résonance $\Omega_0 \sim kW_{\parallel}$, donc tant que $W_{\perp} \gg W_{\parallel}$, cette condition est aisément remplie. Par contre, si l'on s'intéresse à des particules situées au voisinage du cône de perte, prenons par exemple

$$\frac{W_{\parallel}}{W_{\perp}} = 10, \text{ il est nécessaire que } \frac{\Omega_1}{\Omega_0} \ll 10^{-4}$$

ce qui est rarement satisfait (tout au moins dans le domaine UBF). Il est donc utile de savoir ce qui se passe dans le cas où $W_{\perp}(t=0)$ est faible.

Cas $W_{\perp}(t=0)$ faible

Reprendons les expressions (2.11) et (2.12). Fixons-nous les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} W_{\perp}(t=0) = 0 \\ v(t=0) = 0 \end{cases}$$

Moyennant quoi :

$$T = \left(\frac{\Omega_0}{k} \right)^2 \text{ et } S = 0$$

et (2.15) devient

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k}{2} \left[-v \left(v^3 + 4 \frac{\Omega_1^2}{k^2} v + 8 \frac{\Omega_0 \Omega_1^2}{k^3} \right) \right]^{1/2} = \frac{k}{2} \sqrt{\phi(v)} \quad (2.28)$$

C'est encore une équation elliptique ; si $\Omega_1 \ll \Omega_0$ les racines du polynôme $\phi(v)$ sont simplement :

$$\begin{cases} v = 0 \\ v = \dots \end{cases} \quad (2.29)$$

$$\begin{cases} v = 0 \\ v = \frac{2\Omega_0^{1/3} \Omega_1^{2/3}}{k} \end{cases} \quad (2.30)$$

La mise sous forme canonique de l'équation elliptique (2.28) est très longue, mais comme le polynôme $P(v)$ n'a que deux racines réelles la fréquence de piégeage est vraisemblablement très voisine de :

$$\omega \sim 2\Omega_0^{1/3} \Omega_1^{2/3} \quad (2.31)$$

la conservation de l'énergie cinétique dans le repère de l'onde implique que

$$W_{\perp \max}^2 \sim 2v_{\max} \frac{\Omega_0}{k} \quad (2.32)$$

on en déduit en combinant (2.31) et (2.32) que le gain maximum en énergie perpendiculaire est :

$$\Delta W_{\perp}^2 \sim \Omega_0^{4/3} \Omega_1^{2/3} \quad (2.33)$$

Cette expression est la même que dans le cas où $W_{\perp}(t=0)$ est grand, mais c'est évidemment le cas $W_{\perp}(t=0)$ faible qui implique la variation maximale en angle d'attaque.

En combinant (2.31) et (2.32), on constate que

$$\varpi = [kW_{\perp}\Omega_1]^{1/2} \quad (2.33 \text{ bis})$$

c'est-à-dire formellement la même expression que dans le cas $W_{\perp}(t=0)$ grand.

On constate que le piégeage a lieu lorsque l'amplitude de l'onde est suffisante pour compenser l'écart initial à la résonance ($\alpha \propto \sqrt{B_1} > S$).

Lorsque la particule est piégée, elle ne reçoit plus d'énergie de l'onde, mais il y a échange d'énergie entre les composantes parallèle et perpendiculaire de sa vitesse.

Notons que ces résultats sont en parfait accord avec ceux de Roberts et Buchsbaum ; on peut s'en persuader en comparant leurs expressions (3.23) et (3.26) aux expressions (2.20) et (2.31) du présent chapitre (il faut alors tenir compte de l'hypothèse $V_{\phi} \ll c$).

Cas collectif

On a vu, qu'en moyenne, le piégeage avait pour effet d'empêcher l'onde de céder de l'énergie à la particule, on peut donc s'attendre, dans le cas collectif, à ce que ce mécanisme annule, ou du moins diminue, le taux d'amortissement ou d'instabilité prévisible par la théorie linéarisée de l'équation de Vlasov.

Les hypothèses (1.17) et (1.18) ne sont plus valables

ici, on doit reprendre l'expression (1.14) et calculer $f_0^{(2)}$ en effectuant l'intégration avec des hypothèses différentes. Ces calculs ne sont pas terminés et feront l'objet d'une publication ultérieure. Néanmoins, on peut avoir une idée des résultats en s'inspirant de ceux obtenus dans le cas de l'amortissement d'une onde électrostatique se propageant dans un plasma maxwellien [LAVAL et al., 1969]. Les auteurs montrent que le niveau final de champ est en général notablement plus faible que sa valeur initiale, contrairement à ce que prévoient AL'TSHUL et KARPMAN [1965] et O'NEIL [1966]. La valeur moyenne sur le temps de la partie homogène de la fonction de distribution tend, dans la région résonnante, vers un plateau dont la largeur $(\Delta V \sim \frac{\varpi^2 \omega}{k^3 V_{th}^2})$ où V_{th} est la vitesse thermique de la Maxwellienne) dépend de l'amplitude de l'onde (par l'intermédiaire de ϖ). Ce résultat est très différent de celui de la théorie quasi linéaire électrostatique qui prévoit, pourvu que l'amplitude de l'onde soit suffisante, un plateau dont la largeur dépend de celle du spectre.

Les modèles numériques utilisés par ARMSTRONG [1966] et DAWSON et SHANNY [1967] confirment ces résultats.

Le cas instable est plus délicat à traiter analytiquement ; toutefois, puisque le piégeage s'oppose à l'amortissement on peut s'attendre à ce que l'instabilité soit détruite dès que le champ de l'onde aura atteint une valeur suffisante pour que le piégeage devienne prépondérant, plus précisément, les ondes cesseront de croître lorsque la fréquence de piégeage $\varpi (\varpi \propto \sqrt{B_1})$ sera du même ordre de grandeur que le taux de croissance linéaire. Ce résultat sera utilisé dans la quatrième partie ; notons qu'il est en parfait accord avec celui que GUREVITCH [1968] a obtenu par un calcul numérique dans le cas électrostatique instable.

TROISIÈME PARTIE

Application aux émissions électromagnétiques naturelles.

Appliquons maintenant les résultats obtenus précédemment aux cas des ondes T.B.F. et U.B.F. qui prennent naissance dans la magnétosphère. On se place dans le cas où

$$V_\phi = \frac{\omega}{k} \ll V_{\text{rés}}$$

cette condition, en général vérifiée en T.B.F. est plus difficile à réaliser en U.B.F. [GENDRIN, 1968]. Cependant, nous nous intéressons à des cas où le coefficient d'amplification est important, ce qui implique que $\frac{\omega}{\omega_c}$ soit nettement inférieur à l'unité comme le montre la forme du coefficient d'amplification [formule 2.20 de KENNELL et PETSCHKE, 1966]. Par conséquent $V_\phi/V_{\text{rés}}$ sera aussi inférieur à l'unité. Dans ce cas l'équation diffusion (1.16) peut se développer en série par rapport au paramètre $V_\phi/V_{\text{rés}}$. A l'ordre le plus bas, on obtient l'équation de diffusion en angle d'attaque, l'équation de diffusion en énergie qui est en $(V_\phi/V_{\text{rés}})^2$ peut être négligée en première approximation [TVERSKOV, 1968].

Moyennant ces hypothèses l'équation (1.16) s'écrit

$$\frac{\partial G_0}{\partial t} = \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[D \sin \alpha \frac{\partial G_0}{\partial \alpha} \right] \quad (3.1)$$

avec $D = \pi \frac{\omega_c^2}{|V_{||}|^2} \frac{B_1^2}{B_0^2} \frac{1}{\Delta k}$ (3.2)

$\frac{B_1^2}{\Delta k}$ énergie spectrale et $\tan \alpha = V_\perp/V_{||}$

ce qui donne

$$\Delta \alpha \simeq - \frac{\Delta V_{||}}{V_\perp} \quad (3.3)$$

1^o Évaluons τ_{G_0} en utilisant (3.1) (3.2) et (3.3) ; nous avons :

$$\frac{G_0}{\tau_{G_0}} \sim D \frac{G_0}{(\Delta \alpha)^2}$$

donc

$$\tau_{G_0} \sim \frac{|V_{||}| B_0^2 (\Delta \alpha)^2 \Delta k}{\pi \omega_c^2 B_1^2} \sim \frac{|V_{||}| B_0^2 \left(\frac{\Delta V_{||}}{V_\perp} \right)^2 \Delta k}{\pi \omega_c^2 B_1^2} \quad (3.4)$$

or τ_{G_0} doit vérifier la condition (1.17) qui s'écrit :

$$\tau_{G_0} \gg \frac{1}{|V_{||}| \Delta k}$$

Remplaçons τ_{G_0} par son expression (3.4) dans (1.17) ; il vient alors

$$\frac{m^2}{q^2} \frac{1}{V_\perp^2 B_1^2} \frac{1}{k^2} \gg \frac{1}{k^2} \frac{1}{|V_{||}|^2 (\Delta V_{||})^2 (\Delta k)^2} \quad (3.5)$$

Utilisons l'expression (2.20) qui donne le temps de piégeage

$$\tau_p \sim \omega^{-1} \sim \left[\frac{m}{q V_\perp B_1 k} \right]^{+1/2}$$

Nous pouvons donc écrire (1.17) sous la forme

$$\tau_p^2 \gg [(|V_{||}| \Delta k) (k \Delta V_{||})]^{-1} \quad (3.6)$$

Si $|V_{||}| \Delta k \sim k \Delta V_{||}$ (ce qui suppose que $k V_{||} - \omega - \omega_c \sim 0$ et $\omega + \omega_c \sim \text{constante}$) 3.6 s'écrit :

$$\tau_p \gg [|V_{||}| \Delta k]^{-1} \quad (3.7)$$

Cette condition signifie que le temps de piégeage doit être beaucoup plus grand que le temps de cohérence de l'onde de façon que les particules ne puissent pas être piégées par l'onde.

2^o Examinons la condition (1.18) ; elle exprime que la croissance d'un mode doit avoir lieu sur un temps caractéristique grand devant le temps de cohérence de l'onde; on a :

$$\tau_e^{-1} \sim \gamma \leq \gamma \text{ linéaire}$$

Dans le cas des interactions $e-R$ on peut écrire γ_L sous une forme analogue à celles indiquées par KENNELL et PETSCHKE [1966] et LIEMOHN [1967]

$$\begin{aligned} \gamma_L &= \pi |\omega_{ce}| \left[1 - \frac{\omega}{|\omega_{ce}|} \right]^2 \eta_e(V_R) \\ &\times \left[A_e(V_R) - \frac{1}{\frac{\omega}{\omega} ce - 1} \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\eta_e(V_R) = 2\pi \frac{|\omega_{ce}| - \omega}{k} \int_0^\infty V_\perp dV_\perp F_0(V_\perp, V_{||} = V_R)$$

où

$$A_e(V_R) = \frac{\int_0^\infty V_\perp dV_\perp \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial F_0}{\partial \alpha}}{2 \int_0^\infty V_\perp dV_\perp F_0} \Big|_{V_{||} = V_R}$$

(avec $G_0 = n_0 F_0$, n_0 étant la densité du plasma froid. n_e dépend du nombre total de particules résonnantes et fixe le coefficient d'amplification.

A_e est le facteur d'anisotropie, il définit l'existence d'une amplification ou d'un amortissement.

Donc, lorsque $\omega \ll |\omega_{ce}|$

$$\tau_E^{-1} \leq \gamma_L \sim |\omega_{ce}| \frac{\Delta n_1 |V_{||}|}{n_0 \Delta V_{||} \Delta \alpha} \frac{1}{|\omega_{ce}|} \sim |\omega_{ce}| \frac{n_1 |V_{||}| |V_\perp|}{n_0 (\Delta V_{||})^2} \quad (3.9)$$

où n_0 est la densité du plasma froid et Δn_1 celle des particules chaudes dans la région résonnante. En remplaçant τ_E par (3.9) dans la condition (1.17), nous obtenons :

$$\frac{\Delta n_1}{n_0} \ll \frac{1}{|\omega_{ce}| |V_{||}| |V_\perp|} |V_{||}| \Delta k \quad (3.10)$$

soit encore si

$$|V_{||}| \Delta k \sim k \Delta V_{||} \text{ et } V_\perp \sim |V_{||}| \simeq \frac{|\omega_{ce}|}{k}$$

$$\frac{\Delta n_1}{n_0} \ll \left(\frac{\Delta k}{k} \right)^3 \quad (3.11)$$

Dans le cas des interactions (p, L) d'après la formule (2.23) de KENNEL et PETSCHEK [1966]

$$\gamma \sim \frac{\omega_{cl}^2 \Delta n_1 |V_{||}|}{\omega n_0 \Delta V_{||} \Delta \alpha} \frac{1}{|\omega_{ce}|}$$

et par conséquent, la condition (3.11) devient dans ce cas

$$\frac{\Delta n_1}{n_0} \ll \frac{\omega}{\omega_{cl}} \left(\frac{\Delta k}{k} \right)^3 \quad (3.11 \text{ bis})$$

3^e Appliquons les conditions (3.7), (3.11) et (3.11 bis) qui doivent être vérifiées en théorie quasi linéaire, à des conditions expérimentales précises. On se situe à $L = 5$, au voisinage de l'équateur.

Nous prendrons les valeurs suivantes [HESS, 1968]

$$f_{pe} \sim 10^5 \text{ Hz} \quad n_{1e} \sim 10^2 \text{ el./m}^3 \text{ (pour } E \geq 50 \text{ kev)}$$

$$f_{ce} \sim 10^4 \text{ Hz} \quad n_{0e} \sim 10^8 \text{ el./m}^3$$

$$f_{cl} \sim 5 \text{ Hz} \quad B_0 \sim 300 \gamma$$

Dans le cas des T.B.F., nous considérons des interactions $e-R$ avec $\omega \ll |\omega_{ce}|$ pour lesquelles la relation de dispersion s'écrit :

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} \simeq \frac{\omega_{pe}^2}{\omega |\omega_{ce}|}$$

ce qui donne

$$\frac{d\omega}{\omega} \simeq 2 \frac{dk}{k} \quad (3.12)$$

Dans le cas des U.B.F., nous considérons des interactions $p-L$ pour lesquelles la relation de dispersion s'écrit

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} \simeq \frac{\omega_{pl}^2}{\omega_{ci}(\omega_{ci} - \omega)}$$

ce qui donne

$$\frac{d\omega}{\omega} \simeq \frac{dk}{k} \quad (3.13)$$

4^e Dans le cas des T.B.F., nous prendrons

$$B_{1f} = 1 \text{ m}\gamma \times \text{Hz}^{-1/2} \quad f = 1 \text{ kHz}$$

$$k \sim 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1} \quad V_\perp \sim V_{||} \sim 10^8 \text{ m/s} (E \sim 40 \text{ kev})$$

la condition (3.7) peut s'écrire, en utilisant (3.5) sous la forme d'une condition sur la largeur du spectre des ondes :

$$\left(\frac{\Delta k}{k} \right)^2 \gg \frac{1}{|V_{||}| m} \frac{q B_1}{k} \quad (3.14)$$

ou, en introduisant les intensités spectrales

$$\left(\frac{\Delta k}{k} \right)^3 \gg \frac{1}{V_{||}^2 m^2} \frac{q^2 B_{1f}^2 V_g}{2\pi k} \quad (3.14 \text{ bis})$$

En utilisant (3.12), (3.14 bis) et les valeurs numériques, nous obtenons la condition suivante

$$\frac{\Delta f}{f} \gg 10^{-2} \quad (3.15)$$

la condition (3.11) nous donne de même

$$\frac{\Delta f}{f} \gg 2 \cdot 10^{-2} \quad (3.16)$$

Il existe de nombreux cas où les ondes T.B.F. vérifient facilement ces conditions sur la largeur relative en fréquence du spectre (en particulier dans le cas des émissions de « souffle »). On peut donc penser que la théorie quasi linéaire pourrait s'appliquer dans ces cas.

5° Dans le cas des ondes U.B.F. de type P_{c1}, nous prendrons

$$(\text{interaction } p-L) f \sim 1 \text{ Hz} \quad V_{\perp} \sim V_{||} \sim 3.10^6 \text{ m/s}$$

$$f_{pt} \sim 2.10^3 \text{ Hz} \quad k = 8.10^{-6} \text{ m}^{-1} \quad B_1 \sim 1 \text{ y}$$

Pour que la théorie quasi linéaire s'applique, il est nécessaire que les relations (3.11 bis et 3.14)

soient vérifiées ; elles s'expriment avec les valeurs numériques précédentes sous la forme :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \gg 10^{-1} \text{ et } \frac{\Delta\omega}{\omega} \gg 0.9.10^{-1}$$

Ces conditions sont incompatibles avec les largeurs de spectres qui sont généralement observées dans le cas des « perles » (oscillation de fréquence assez bien définie : $\Delta\omega/\omega \sim 2.10^{-2}$ à 2.10^{-1}). Il sera donc indispensable d'appliquer à ces événements la théorie monochromatique et non plus la théorie quasi linéaire.

Remarquons que le fait que les conditions de validité de la théorie quasi linéaire soient satisfaites par les T.B.F. et non par les U.B.F. semble dépendre à la fois des largeurs relatives différentes pour ces deux types d'émission, mais aussi des amplitudes de champ différentes (dans un rapport $\frac{B(\text{U.B.F.})}{B(\text{T.B.F.})} \sim 1000$.

QUATRIÈME PARTIE

Distribution spectrale des ondes en théorie quasi linéaire

Spectres maximaux admissibles en théories monochromatique et quasi linéaire

Nous venons de voir que les amplitudes de champ jouent un rôle important dans les conditions de validité de la théorie quasi linéaire. Calculons les valeurs optimales de champ que permettent de prévoir les deux théories qui nous intéressent. On en profitera, dans le cadre de la théorie quasi linéaire, pour déduire une expression qui donne l'amplitude maximale du champ en fonction de la fréquence et de l'anisotropie.

I. Théorie quasi linéaire

Nous utilisons de nouveau l'expression (3.8) du taux de croissance ; γ n'est positif que si la quantité entre crochets est positive, c'est-à-dire si :

$$A_e(V_{\text{res}}) > A_0 = \frac{1}{\frac{|\omega_{ce}|}{\omega} - 1} \quad (4.1)$$

ce qui impose une anisotropie minimum ; plaçons-nous dans le cas où $\omega \ll |\omega_{ce}|$ (la justification de cette hypothèse est indiquée dans la troisième partie) ; la diffusion en angle d'attaque a lieu sur un temps caractéristique τ_{Dx} court, devant le temps τ_{Dw} de diffusion de l'énergie [TVERSKOV, 1968]. Au bout d'un

temps $t \sim \tau_{Dx}$ l'anisotropie a disparu et γ devient négatif.

Les ondes qui ont été émises pendant la période instable ($t < \tau_{Dx}$) peuvent être ensuite amorties ($\tau_{Dx} < t < \tau_{Dw}$).

Ces temps caractéristiques doivent être comparés aux temps caractéristiques liés à la géométrie finie du milieu ; on peut supposer que la diffusion en énergie, puisqu'elle n'intervient que sur un temps long, sera masquée par d'autres phénomènes.

Quoiqu'il en soit, le spectre final prévisible en théorie quasi linéaire étant nul, il semble plus intéressant d'étudier ce spectre au bout d'un temps $t \sim \tau_{Dx}$; l'hypothèse $\omega \ll |\omega_{ce}|$ permet d'écrire (3.8) sous la forme :

$$\gamma = \pi^2 |\omega_{ce}| V_{\text{Res}}$$

$$\times \left[\int_0^\infty V_{\perp} dV_{\perp} \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{\partial f_0}{\partial \alpha} \right)_v = \text{Cte} \right]_{V_{||} = V_R} \quad (4.2)$$

Puisque l'intégrale est prise pour $V_{||} = V_R$, nous avons :

$$V_{\perp} = V_{||} \operatorname{tg} \alpha = V_R \operatorname{tg} \alpha$$

(4.2) devient :

$$\gamma = \pi^2 |\omega_{ce}| V_R^3 \left[\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \left(\frac{\partial f_0}{\partial \alpha} \right)_{v=Cte} d\alpha \right] \quad (4.3)$$

l'équation de diffusion (1.16) devient, en ne tenant compte que de la diffusion en angle d'attaque et, en passant à un spectre continu à l'aide de la relation

$$\Sigma \rightarrow \frac{L}{2\pi} \int dk$$

quand L devient grand (cf. aussi 3.1)

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{L}{2 \sin \alpha} \frac{1}{\partial \alpha} \left[\frac{\sin \alpha |\Omega_1(k)|^2}{|V \cos \alpha|} \left(\frac{\partial f_0}{\partial \alpha} \right)_{v=Cte} \right] \quad (4.4)$$

$$\text{où } |\Omega_1|^2 = q^2/m^2 B_1^2(k)$$

$$\text{or, si } \omega \ll |\omega_{ce}| \text{ nous avons } V_R \sim -\frac{|\omega_{ce}|}{k}$$

l'équation (4.4) devient :

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{L}{2 \sin \alpha} \frac{1}{\partial \alpha} \left[\frac{\sin \alpha |\Omega_1(V_R)|^2}{V_R} \left(\frac{\partial f_0}{\partial \alpha} \right)_{v=Cte} \right] \quad (4.5)$$

Nous intégrons par rapport à α (à $v = \text{Cte}$)

$$\begin{aligned} & \int_0^\alpha \sin \alpha' \frac{\partial f_0}{\partial t} (v, \alpha') d\alpha' \\ &= \frac{L}{2} \sin \alpha \frac{|\Omega_1(V_R)|^2}{V_R} \left(\frac{\partial f_0}{\partial \alpha} \right)_{v=Cte} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Intégrons une seconde fois par rapport à α ; les variables indépendantes sont maintenant α et V_R , ce qui permet de faire apparaître le taux de croissance γ sous la forme (4.2).

Donc :

$$\begin{aligned} & \pi^2 |\omega_{ce}| V_R^3 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \alpha}{\cos^4 \alpha} \left[\int_0^\alpha \sin \alpha' \frac{\partial f_0}{\partial t} d\alpha' \right] d\alpha \\ & \frac{L}{2} \gamma \frac{|\Omega_1(V_R)|^2}{V_R} = \frac{L}{4} \frac{1}{V_R} \frac{\partial}{\partial t} |\Omega_1(V_R)|^2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

compte tenu du fait que :

$$\frac{\partial}{\partial t} |\Omega_1|^2 = 2\gamma |\Omega_1|^2$$

Intégrons par rapport au temps entre $t = 0$ et $t = \tau_{D\alpha}$,

en supposant que le spectre initial est négligeable. On obtient

$$\begin{aligned} |\Omega_1(V_R)|^2_{t=\tau_{D\alpha}} &= \frac{4\pi^2}{L} V_R^4 |\omega_{ce}| \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \alpha}{\cos^4 \alpha} \\ & \left[\int_0^\alpha \sin \alpha' \left\{ f_0 \left(t = \tau_{D\alpha}, \frac{V_R}{\cos \alpha}, \alpha' \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - f_0 \left(t = 0, \frac{V_R}{\cos \alpha}, \alpha' \right) \right\} d\alpha' \right] d\alpha \end{aligned} \quad (4.8)$$

Pour calculer $\Omega_1(V_R)$, on va se donner une fonction de distribution de plasma chaud à $t = 0$; la conservation de la densité nous permettra d'en déduire sa valeur pour $t = \tau_{D\alpha}$

Prenons :

$$f_0 = C \exp \left(-\frac{v^2}{v_0^2} \right) \sin^m \alpha$$

où C est le facteur de normalisation.

Il est aisément vérifié qu'il y a conservation de la densité, en effet

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[2\pi \int f_0 v^2 \sin \alpha dv \right] \quad (4.9)$$

En utilisant (4.5), (4.9) et la forme particulière choisie pour f_0 , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} &= 2\pi C \frac{L}{2} \int v^2 \exp \left(-\frac{v^2}{v_0^2} \right) dv \int_0^{\pi/2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ & \times \left[\frac{|\Omega_1|^2}{V \cos \alpha} m \sin^m \alpha \cos \alpha \right] d\alpha \end{aligned} \quad (4.10)$$

et puisque

$$\begin{cases} \sin \alpha = 0 \text{ si } \alpha = 0 \\ \Omega_1(V_R) = 0 \text{ si } \alpha = \pi/2 \end{cases} \rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} = 0$$

On déduit de la conservation de la densité dans chaque tranche de vitesse que :

$$\int_0^{\pi/2} f_0(t=0) \sin \alpha d\alpha = \int_0^{\pi/2} f_0(t=\tau_{D\alpha}) \sin \alpha d\alpha \quad (4.11)$$

cette égalité est, bien entendu, liée au fait qu'il n'y a pas sur l'échelle de temps considérée, de diffusion en énergie. Au bout d'un temps de l'ordre de $\tau_{D\alpha}$ la fonction de distribution s'est relaxée vers une fonction de distribution isotrope (en négligeant l'influence du cône de perte).

$$f_0(t=\tau_{D\alpha}) = R \left[c \exp \left(-\frac{v^2}{v_0^2} \right) \right] \quad (4.12)$$

calculons R en utilisant (4.11) et (4.12)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m \alpha \sin \alpha d\alpha = R \int_0^{\pi/2} \sin \alpha d\alpha = R \quad (4.13)$$

on obtient [GRADSHTEYN et RYZHIK, 1965]

$$R = 2^m B\left(\frac{m+2}{2}, \frac{m+2}{2}\right) \quad (4.14)$$

B étant définie comme dans la référence ci-dessus.

Pour simplifier, on prend $m = 3$. On a alors $R = 3\pi/16$.

Reportons ces résultats dans (4.8), nous obtenons après intégration

$$\begin{aligned} [\Omega_1(V_R)]_{t=\tau_{D\alpha}}^2 &= \\ &- \frac{4\pi^2}{L} V_R^4 |\omega_{ce}| C \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \alpha}{\cos^4 \alpha} \exp\left[-\frac{V_R^2}{V_0^2 \cos^2 \alpha}\right] \{M\} d\alpha \\ \{M\} &= \frac{3\alpha}{8} - \frac{3\pi}{16} \\ &+ \frac{3\pi}{16} \cos \alpha - \frac{3}{8} \sin \alpha \cos \alpha - \frac{1}{4} \cos \alpha \sin^3 \alpha \end{aligned}$$

On peut noter que le maximum du spectre a lieu pour $V_R \sim V_0$, et qu'il a la forme

$$P(V_R) \exp\left(-\frac{V_R^2}{V_0^2}\right)$$

où $P(V_R)$ est un polynôme. Sans résoudre complètement le problème on peut déduire des calculs précédents un résultat intéressant. Reprenons la formule (4.8) et résolvons de manière approchée :

$$f_0(t=\tau_{D\alpha}) - f_0(t=0) \sim -\Delta\alpha \frac{\partial f_0}{\partial \alpha}$$

donc :

$$\int_{0^\circ}^{\Delta\alpha} \sin \alpha' [f_0(t=\tau_{D\alpha}) - f_0(t=0)] d\alpha' \sim -(\Delta\alpha)^2 \sin \alpha \frac{\partial f_0}{\partial \alpha} \quad (4.16)$$

$\Delta\alpha$ représente la valeur moyenne de la diffusion en angle d'attaque. Moyennant quoi la formule (4.8) peut être approchée par :

$$|\Omega_1(V_R)|_{t=\tau_{D\alpha}}^2 \sim (\Delta\alpha)^2 \frac{4}{L} V_R^4 |\omega_{ce}| \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^4 \alpha} \frac{\partial f_0}{\partial \alpha} d\alpha \quad (4.17)$$

soit en utilisant (4.3)

$$|\Omega_1(V_R)|_{t=\tau_{D\alpha}}^2 \sim \frac{4(\Delta\alpha)^2}{L} V_R \gamma_L \quad (4.18)$$

Ce résultat est très analogue à celui obtenu dans le cas électrostatique par DRUMMOND et PINES [1962]. On en déduit que le carré du champ maximum que l'on peut espérer en théorie quasi linéaire est proportionnel au taux de croissance linéaire.

$$|\Omega_1|_{Q,L}^2 \propto \gamma_L \quad (4.19)$$

Nous pouvons utiliser les résultats précédents pour comparer numériquement les valeurs que l'on peut espérer obtenir pour le champ magnétique des ondes, dans le cas quasi linéaire et dans le cas monochromatique.

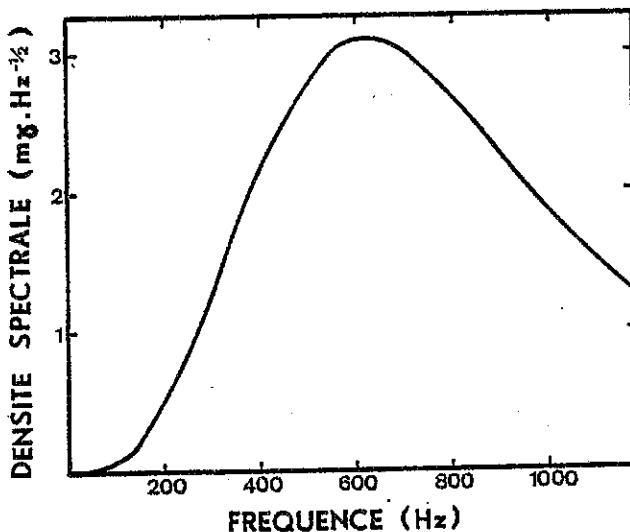


FIG. 3

Spectre d'équilibre du bruit T.B.F., à large bande, obtenu après saturation dans l'approximation quasi linéaire. La fonction de distribution initiale des particules énergétiques est donnée par

$$n_1 \exp\left[-\frac{E}{E_0}\right] \sin^m \alpha$$

On a pris $m = 3$, $E_0 = 45$ keV, $n_1 = 10^3$ el./m³. On s'est placé à $L = 5$ avec une densité de plasma froid $n_0 = 10^6$ el./m³.

Dans le cas des ondes T.B.F., en supposant que la théorie quasi linéaire s'applique, nous utiliserons la formule (4.15). Nous pouvons l'écrire, après quelques calculs élémentaires sous la forme : (B_{1f}^2 , carré du champ magnétique par unité de fréquence)

$$B_{1f}^2(V_R) = -\frac{n_1}{n_0} \frac{64}{3\sqrt{\pi}} \frac{V_R}{V_g} \left(\frac{V_R}{V_0}\right)^3 \frac{m^2}{q^2} |\omega_{ce}|$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin \alpha}{\cos^4 \alpha} \exp\left[-\frac{V_R^2}{V_0^2 \cos^2 \alpha}\right] \{M\} d\alpha \quad (4.20)$$

avec

$$V_R^2 = c^2 \left(\frac{\omega_{ce}}{\omega_{pe}} \right)^2 \left(\frac{\omega_{ce}}{\omega} \right) \text{ et } V_g = 2c \left(\frac{\omega}{\omega_{ce}} \right)^{1/2} \frac{\omega_{ce}}{\omega_{pe}}$$

$$= 2V_R \frac{\omega}{\omega_{ce}}$$

et $V_0^2 = \frac{4\bar{E}}{3m}$ où \bar{E} est l'énergie moyenne des particules chaudes.

En reprenant les valeurs numériques admises précédemment à $L = 5$ pour les T.B.F. et en supposant $\bar{E} \approx 45$ keV pour les électrons, nous pouvons tracer numériquement un spectre d'onde (voir fig. 3).

II. Cas monochromatique

En interprétant les pulsations Pc 1 comme des ondes monochromatiques émises par interactions (p. L.), nous avons d'après la deuxième partie :

$$\omega_{max} \sim [kV_L \Omega_{1max}]^{1/2} \text{ et } \omega_{max} \sim \gamma_L (p-L)$$

ce qui donne :

$$B_1 \sim \frac{\gamma_L^2 m_e}{kV_L q} \quad (4.21)$$

$$\text{or } \gamma(p-L) \sim \frac{\omega_{ci}^2}{\omega} \frac{\Delta n_1}{n_0} \frac{1}{\left(\frac{\Delta \omega}{\omega} \right)^2} \text{ d'après (3.11 bis)}$$

D'après les valeurs numériques de la troisième partie et prenant $\frac{\Delta \omega}{\omega} \sim 10^{-1}$, nous obtenons $\gamma_L \sim 1$ Rd/s et $B_1 \sim 0,5 \gamma$.

Les ordres de grandeur obtenus pour les amplitudes maximum des champs magnétiques sont donc assez satisfaisants dans les deux cas.

NOTE

Au moment d'envoyer cet article, nous avons eu connaissance d'un article de Charles S. Roberts (Pitch angle diffusion of electrons in the magnetosphere, Reviews of Geophysics vol. 7, n°s 1, 2, February-May 1969) donnant un certain nombre de courbes expérimentales concernant le spectre des ondes en fonction de la fréquence, courbes qui

sont proches de celle obtenue par la théorie Q — L, dans cet article (fig. 3) ; nous pensons qu'une étude plus précise est nécessaire. Elle est actuellement en cours et elle donnera lieu à une publication ultérieurement.

CONCLUSION

On constate que la théorie quasi linéaire ne doit pas être utilisée sans précaution ; si les temps caractéristiques d'évolution du champ et de la fonction de distribution ne sont pas supérieurs au temps de cohérence de l'onde, on doit traiter le problème par une théorie différente.

L'expression générale obtenue à l'ordre deux pour la partie homogène de la fonction de distribution permet, moyennant des hypothèses différentes de celles utilisées en théorie quasi linéaire, d'obtenir une théorie valable pour une onde monochromatique ; le paramètre essentiel de cette théorie est la fréquence de piégeage ; on la calcule à partir du mouvement individuel d'une particule sous l'action d'un champ magnétique statique et d'une onde électromagnétique. Le calcul fait apparaître, dans le repère où la fréquence de l'onde modifiée par effet Doppler est égale à la gyrofréquence de la particule, une composante parallèle de la vitesse de la particule qui est une fonction oscillante du temps. Un tel effet se traduit, lorsque l'amplitude de l'onde est suffisante, et si, initialement la particule est assez voisine de la résonance, par une oscillation de la particule piégée dans le puits de potentiel de l'onde.

La conservation de l'énergie cinétique dans le repère de l'onde implique que la vitesse perpendiculaire de la particule soit également une fonction oscillante du temps (autour d'une valeur moyenne généralement non nulle). Le gain maximum en énergie perpendiculaire est

$$\Delta W_{\perp}^2 \text{ max} \sim \frac{\Omega_1^{2/3} \Omega_0^{4/3}}{k^2}$$

En explicitant les conditions de validité de la théorie quasi linéaire, on constate qu'elle est applicable aux émissions à large bande et peu intenses du type « souffle » dans le domaine des T.B.F. Par contre, les émissions en perles du type pc 1 qui sont relativement intenses et assez étroites en fréquence sortent du cadre de la théorie quasi linéaire. Il semble que la théorie monochromatique soit bien adaptée à leur étude.

L'étude des spectres maximaux obtenus en théorie quasi linéaire et en théorie monochromatique montre que les valeurs de l'amplitude des champs magnétiques prévisibles par ces deux théories sont compatibles avec les valeurs expérimentales observées.

Dans le cas du souffle, où comme on l'a vu, la théorie quasi linéaire semble s'appliquer, nous avons pu donner une expression du champ magnétique de l'onde en fonction de la fréquence émise.

Il faut toutefois remarquer que ces théories sont faites dans un milieu infini et homogène, ce qui n'est pas le cas de la magnétosphère. Or la fonction de distribution des électrons peut, dans le cas du souffle T.B.F., évoluer sur une échelle de temps telle que, les particules peuvent effectuer de nombreux aller et retour avant que cette fonction de distribution soit fortement modifiée. Ceci implique qu'il faudrait tenir compte de la géométrie finie et de l'inhomogénéité du milieu.

Dans le cas des pulsations de type pc 1, la fonction de distribution est fortement modifiée sur un temps nettement inférieur au temps d'aller et retour des protons. Aussi une théorie monochromatique en milieu infini et homogène semble suffisante, au moins en première approximation.

Des mesures expérimentales directes des ondes et des particules seraient d'un grand intérêt du point de vue de la théorie. Compte tenu du temps de résolution des détecteurs de particules et des possibilités limitées de la télémesure, ces mesures ne sont envisageables que dans le domaine U.B.F. mais l'on peut facilement concevoir, dans ce domaine, des expériences qui permettraient de mettre en évidence le piégeage des particules et d'en étudier expérimentalement les effets sur les fonctions de distribution angulaires et énergétiques.

Nous tenons à remercier MM. G. Laval et R. Pellat, qui nous ont initiés aux mécanismes non linéaires. Nos remerciements vont également à M. R. Gendrin, pour ses nombreux conseils et l'intérêt qu'il a porté à ce travail. Nous nous devons également de mentionner les fructueuses discussions que nous avons eues avec Mme J. Etcheto et Mlle S. Lacourly.

APPENDICE

COUPLAGES A TROIS ONDES

Étudions dans les hypothèses précédentes ($\vec{k} \parallel \vec{B}_0$, E et B transverses), la possibilité de couplages non linéaires à trois ondes. Un tel mécanisme est susceptible de se produire si les conditions suivantes sont remplies simultanément.

- A) $\omega_k = \omega_{k'} + \omega_{k-k'}$
- B) $D(\omega_k, \vec{k}) = 0 \quad D(\omega_{k'}, \vec{k}') = 0 \quad D(\omega_{k-k'}, \vec{k} - \vec{k}') = 0$
- C) Les matrices d'interaction sont différentes de zéro.

Les deux premières conditions peuvent être réalisées pour l'onde droite, mais nous allons montrer que la troisième ne le sera jamais.

Les éléments de la matrice d'interaction à trois ondes s'obtiennent en reportant les courants non linéaires calculés à l'ordre deux dans les équations de Maxwell.

Écrivons l'équation d'évolution de la composante de Fourier k de la partie inhomogène de la fonction de distribution.

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + i\vec{k} \cdot \vec{v} f_k - \omega_c \frac{\partial f_k}{\partial \phi}$$

$$= -\frac{q}{m} (\vec{E}_k + \vec{V} \Lambda \vec{B}_k) \vec{\nabla}_v G_0 + \frac{q}{m} \sum_{k'} N_{kk'} \quad (5.1)$$

$$\text{avec } N_{kk'} = (\vec{E}_{k'} + \vec{V} \Lambda \vec{B}_{k'}) \cdot \vec{\nabla}_v f_{k-k'}$$

Après analyse de Fourier sur le temps, on obtient au premier ordre

$$f_k^{(1)} = \frac{iq}{2m} \left[\frac{E_k^{+(1)} e^{-i\phi}}{\omega - kV_{||} + \omega_c} + \frac{E_k^{-(1)} e^{+i\phi}}{\omega - kV_{||} - \omega_c} \right] A_k G_0 \quad (5.2)$$

au deuxième ordre :

$$f_k^{(2)} [i(\omega - kV_{||})] - \omega_c \frac{\partial f_k^{(2)}}{\partial \phi}$$

$$= -\frac{q}{2m} [E_k^{+(2)} e^{-i\phi} + E_k^{-(2)} e^{+i\phi}] A_k G_0$$

$$- \frac{q}{m} E_{||k}^{(2)} \frac{\partial G_0}{\partial V_{||}} - \frac{q}{m} \sum_{k'} M_{kk'} \quad (5.3)$$

Calculons $M_{kk'}$ en utilisant la relation $B = C \frac{\partial}{\partial \phi}$ on obtient :

$$\begin{aligned} M_{kk'} &= \frac{iq}{2m} \left\{ (A - C)_{k'} \left[\frac{E_{k'}^{+(1)} E_{k-k'}^{+(1)} e^{2i\phi}}{\omega - \omega' - (k - k')V_{||} + \omega_c} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{E_{k'}^{-(1)} E_{k-k'}^{-(1)} e^{-2i\phi}}{\omega - \omega' - (k - k')V_{||} - \omega_c} \right] A_{k-k'} G_0 \right. \\ &\quad \left. + (A + C)_{k'} \left[\frac{E_{k'}^{+(1)} E_{k-k'}^{-(1)}}{\omega - \omega' - (k - k')V_{||} - \omega_c} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{E_{k'}^{-(1)} E_{k-k'}^{+(1)}}{\omega - \omega' - (k - k')V_{||} + \omega_c} \right] A_{k-k'} G_0 \right\} \end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire $f_k^{(2)}$ sous la forme (5.4)

$$f_k^{(2)} = \frac{iq}{2m} \left[\frac{E_k^{+(2)} e^{-i\phi}}{\omega - kV_{||} + \omega_c} + \frac{E_k^{-(2)} e^{+i\phi}}{\omega - kV_{||} - \omega_c} \right] A_k G_0$$

$$+ \frac{iq}{m} \frac{E_{k||}^{(2)}}{\omega - kV_{||}} \frac{\partial G_0}{\partial V_{||}}$$

$$- \frac{q^2}{m^2} \left\{ (A-C)_{k'} \left[\frac{E_{k'}^{+(1)} E_{k-k'}^{+(1)} e^{2i\phi}}{(\omega - kV_{||} - 2\omega_c)(\omega - \omega' - (k-k')V_{||} + \omega_c)} \right. \right.$$

$$+ \frac{E_{k'}^{-(1)} E_{k-k'}^{-(1)} e^{-2i\phi}}{(\omega - kV_{||} + 2\omega_c)(\omega - \omega' - (k-k')V_{||} - \omega_c)} \left. \right]$$

$$+ \frac{1}{\omega - kV_{||}} (A+C)_{k'} \left[\frac{E_{k'}^{+(1)} E_{k-k'}^{-(1)}}{\omega - \omega' - (k-k')V_{||} - \omega_c} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{E_{k'}^{-(1)} E_{k-k'}^{+(1)}}{\omega - \omega' - (k-k')V_{||} + \omega_c} \right] \right\} A_{k-k'} G_0$$

A partir des équations de Maxwell

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \Lambda \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \Lambda \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases}$$

on obtient des équations qui lient les champs d'ordre deux aux courants.

$$\left[\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - 1 \right] E_k^{\pm(2)} = \Sigma_s \frac{iqs}{\epsilon_0 \omega} \int V_1 e^{\pm i\phi} f_{ks}^{(2)} V_\perp dV_\perp dV_{||} d\phi \quad (5.5)$$

$$- E_{||k}^{(2)} = \Sigma_s \frac{iqs}{\epsilon_0 k} \int f_{ks}^{(2)} V_\perp dV_\perp dV_{||} d\phi \quad (5.6)$$

Reportons (5.4) dans (5.5).

L'intégration sur ϕ détruit tous les termes oscillants ; ce qui permet d'écrire (5.5) sous la forme :

$$\left[\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - 1 \right. \\ \left. + \Sigma_s \frac{\pi q_s^2}{\epsilon_0 m} \int \frac{V_\perp^2 A_k G_0 dV_\perp dV_{||}}{\omega - kV_{||} \pm \omega_{cs}} \right] E_k^{\pm(2)} = 0 \quad (5.7)$$

Les mêmes opérations transforment (5.6) en (5.8)

$$[\omega^2 - \Sigma_s \omega_{ps}^2] E_{||k}^{(2)} = \Sigma_s \frac{i\pi q_s^2}{\epsilon_0 m^2} \int \frac{V_\perp dV_\perp dV_{||}}{\omega - kV_{||}} \\ \Sigma_k (A+C) [L] A_{k-k'} G_0 \quad (5.8)$$

$$\text{où } [L] = \frac{E_k^{\pm(1)} E_{k-k'}^{(1)}}{\omega - kV_{||} \pm \omega_{cs}} + \frac{E_{k'}^{(1)} E_{k-k'}^{(1)}}{\omega - kV_{||} \pm \omega_{cs}}$$

On constate sur (5.7) qu'il n'y a pas de perturbation non linéaire de l'équation de dispersion, la matrice d'interaction est donc nulle, il est impossible d'obtenir un couplage à trois ondes entre ondes transverses se propageant parallèlement au champ magnétique statique.

Si $\omega \ll \omega_{pe}$, la relation de dispersion des ondes électrostatiques ($\omega^2 - \omega_{pe}^2$) $E_{||k}^{(2)} = 0$ ne peut être satisfaite à l'ordre zéro que si $E_{||k} = 0$. Le terme non linéaire qui figure au second membre de (5.8) est nécessairement petit donc l'équation (5.8) ne peut être satisfaite que pour $E_{||k}^{(2)} = 0$. L'onde électrostatique $E_{||k}^{(2)}$ susceptible de se créer par couplage d'ondes droites et gauches a donc une amplitude quasiment nulle faute de pouvoir se propager tant que $\omega \ll \omega_{pe}$.

Manuscrit reçu le 4 novembre 1969.

RÉFÉRENCES

- AL'TSHUL L. M. and KARPMAN V. I., "Theory of non-linear oscillations in a collisionless plasma," *Soviet Physics J.E.T.P.*, 22, 361; 1966.
- ANDRONOV H. A. and TRAKHTENGERTS V. V., "Kinetic instability of the earth's outer radiation belt," *English Transl. Geomagnetism and Aeronomy*, 4, (2), 181, 1964.
- ARMSTRONG T. P., "Numerical studies of the non-linear Vlasov equation," *Physics of Fluids*, 10, (6), 1269, 1967.
- BELL T. F. and BUNEMAN O., "Plasma instability in the whistler mode caused by a gyrating electron stream," *Phys. Rev.*, 108, (3), 564, 1957.
- BLANC C., « Les équations différentielles de la technique » Édité par les éditions du Griffon, Neuchâtel, 1947.
- BROSSIER C., « Modèle non linéaire d'ondes électromagnétiques progressives en présence d'un champ magnétique », *Fusion Nucléaire*, 4, 137, 1964.
- DAVYDOVSKII V. Ya, *Zh Eksperiment i Theor. Fiz.*, 43, 886, 1962; *English transl. Soviet Phys. J.E.T.P.*, 16, 629, 1963.
- DAWSON J. M. and SHANNY R., "Some investigations of non linear behaviour in one dimensional Plasma," *The Phys. of Fluids*, 11, (7), 1506, 1968.

- DRUMMOND W. E. and PINES P., "Non-linear stability of plasma oscillations," *Nucl. Fusion suppl. part*, 3, 1049, 1962.
- GENDRIN R., "Pitch angle diffusion of low energy protons due to gyroresonant interaction with hydromagnetic waves," *Journ. of Atm. and Ter. Phys.*, 30, 1313, 1968.
- GRADSTEYN I. S. and RYZHIK I. M., "Tables of integrals series and products," Academic Press NY, 1965.
- GUREVICH A. V., "Non-linear stationary state of electron oscillations in a plasma," *Zh. Eksp. Theor. Fiz.*, 84, 522, 1968.
- HESS W. E., "The radiation belt and magnetosphere," Blaisdell Publishing company, 1968.
- KENNEL C. F. and PETSCHEK H. E., "Limit on stably trapped particule fluxes," *Journ. of Geophysical Res.*, 71 (1), 1, 1966.
- LAVAL G., PELLAT R. et ROUX A., « Amortissement non linéaire d'une onde monochromatique d'amplitude finie », *Phys. Letters*, 29 A (3), 159, 1969.
- LIEMOHN H. B., "Cyclotron resonance amplification of V.L.F. and U.L.F. whistlers," *Journ. of Geophysical Res.*, 72, 39, 1967.
- O'NEIL T., "Collisionless damping of non-linear plasma oscillations," *The Phys. of Fluids*, 8, (12), 2255, 1965.
- ROBERTS C. S. and BUCHSBAUM S. J., "Motion of a charged particle in a constant magnetic field and a transverse electromagnetic wave propagating along the field," *Phys. Rev.*, 135, (2A), A 381, 1964.
- SAGDEEV R. Z. and SHAFRANOV V. D., "On the instability of a plasma with an anisotropic distribution of velocities in a magnetic field," *Soviet Physics, J.E.T.P. English Transl.*, 12, (1), 130, 1961.
- SHRAM D. C., "Particle motion in a travelling wave near cyclotron resonance," *Physica*, 37, 617, 1967.
- TVERSKOI V. A., "Theory of turbulent acceleration of charged particles in a plasma," *Soviet Physics J.E.T.P. English Transl.*, 26 (4), 821, 1968.

Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics, 1971, Vol. 33, pp. 1457-1471. Pergamon Press. Printed in Northern Ireland

Self-consistent solution of the quasi-linear theory: Application to the spectral shape and intensity of VLF waves in the magnetosphere

A. ROUX and J. SOLOMON

Groupe de Recherches Ionosphériques, 94, St-Maur, France

(Received 2 November 1970; in revised form 26 March 1971)

Abstract—During a gyroresonant interaction taking place inside the magnetosphere, the relaxation of the warm electrons anisotropy, which is due to quasi-linear effects, changes the growth rate of the VLF waves. A self-consistent treatment of this process enables us to compute the frequency spectrum of these waves. Assuming that the energy diffusion of electrons occurs in a characteristic time much larger than the time required for pitch-angle diffusion, we solve (in a self-consistent way) the coupled system which consists of the diffusion equation for particles and energy conservation for waves. Such a method is similar to the one used by DRUMMOND and PINES (1962) to compute the quasi-linear spectrum in the electrostatic case. In the specific case of emission by magnetospheric electrons, the results of our computation is in agreement with satellite datas from the point of view of both the spectral shape and of the wave intensity.

INTRODUCTION

THE CYCLOTRON instability in the whistler mode has been described by many authors (see for instance LIEMOHN, 1967 in the linear case). ANDRONOV and TRAKHTENGERTZ (1964) have introduced the quasi-linear theory of that kind of instability. Making an hypothesis about the intensity and spectral shape of the emitted waves, TVERSKOV (1968) has solved the pitch-angle diffusion equation and discussed the role played by energy diffusion. KENNEL and PETSCHER (1966) have essentially dealed with the stationary case; they have assumed a permanent source which was able to regenerate the warm electron distribution and a growth rate which exactly balanced the energy losses of the waves escaping from the amplifying zone. One important result of their theory is the existence of a limiting flux for the trapped particles.

A different point of view is adopted here; we study a dynamical problem with an initial condition for the distribution function of the particles and we focus our attention on the final frequency spectrum of the waves. We assume that an initially anisotropic distribution relaxes towards an isotropic (or less anisotropic) one, under the influence of the quasi-linear diffusion; at every time, we compute the new growth rate which corresponds to the new distribution function; we are thus able to compute the new total field intensity and therefore the new diffusion coefficient. If this process is iterated, we can determine the final spectral shape and intensity of the waves, which results from this relaxation mechanism. In fact, only the final spectrum is computed here. We do not assume a continuous injection of hot particles; we only need to make an hypothesis about the initial and final state of the distribution function. These hypotheses are perhaps somewhat restrictive, but the important point is that we obtain a self-consistent solution of the coupled quasi-linear system (diffusion equation for particles and energy conservation for waves).

The first part of this paper is concerned with the solution of the quasi-linear coupled equations in a homogeneous and infinite medium. The second part is devoted to the various characteristics of the wave spectrum with respect to magnetospheric parameters. In the last part, we take into account the finite geometry of the medium and compare the theoretical spectra with the experimental ones.

1. SOLUTION OF THE QUASI-LINEAR SYSTEM

It is generally admitted that the VLF and ELF broad-band hiss is the result of a gyroresonant interaction between energetic electrons and the whistler mode (see KENNEL, 1969; GENDRIN, 1970, for reviews). Such an instability occurs when the electron distribution function is anisotropic and peaked towards large values of the pitch-angle.

For the sake of simplification, let us assume that $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$, where \mathbf{k} is the wave vector and \mathbf{B}_0 the static magnetic field. For broad-band emissions which are not too strong, the following conditions hold:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_E \gg \frac{1}{|V_R| \Delta k} \\ \tau_F \gg \frac{1}{|V_R| \Delta k} \end{array} \right. \quad (1.1)$$

where τ_E and τ_F are the characteristic times associated with the variations of, respectively, the amplitude of the wave electric field and of the distribution function of warm electrons; V_R is the electron resonant velocity (parallel to \mathbf{B}_0); and Δk the width (measured at $1/e$) of the wave spectrum. When both these conditions are satisfied, one can apply the quasi-linear theory to study the wave emission and the particle diffusion resulting from cyclotron instability (ROUX and SOLOMON, 1970). Let us notice that these inequalities are not often fulfilled in the ULF range and that consequently the quasi-linear theory cannot always be used when studying these ultra-low-frequency emissions.

We take the distribution function of the electrons as the sum of a cold plasma distribution function and of a warm plasma distribution function, F_1 :

$$F(v_\perp, v_\parallel, t) = n_0 \left[\frac{1}{2\pi v_\perp} \delta(v_\perp) \delta(v_\parallel) + F_1(v_\perp, v_\parallel, t) \right] \quad (1.2)$$

where n_0 is the cold plasma density.

We write the normalization condition for F_1 :

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty v_\perp dv_\perp \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(v_\perp, v_\parallel, t) dv_\parallel = \frac{n_1}{n_0} \quad (1.3)$$

where n_1 is the density of the warm electrons; we will also use F_1 as $F_1(\alpha, v, t)$, where α is the pitch-angle and v the total velocity.

We write the amplification coefficient γ in the form which was given by KENNEL and PETSCHERK (1966):

$$\gamma = \pi \omega_{ce} \left[1 - \frac{\omega}{\omega_{ce}} \right] \eta_e (V_R) \left[A_e (V_R) - \frac{1}{\frac{\omega_{ce}}{\omega} - 1} \right] \quad (1.4)$$

where

$$\begin{cases} \eta_e (V_R) = 2\pi \frac{(\omega_{ce} - \omega)}{k} \int_0^\infty v_\perp dv_\perp F_1(v_\perp, v_\parallel = V_R) \\ A_e (V_R) = \frac{\int_0^\infty v_\perp dv_\perp \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial F_1}{\partial \alpha}}{2 \int_0^\infty v_\perp dv_\perp F_1} \Big|_{v_\parallel = V_R} \end{cases} \quad (1.5)$$

ω_{ce} is the electron cyclotron frequency:

$$\omega_{ce} = |q_e B_0/m_e|$$

and V_R , the resonant velocity, is given by

$$V_R = (\omega - \omega_{ce})/k.$$

A positive value of γ means amplification, a negative one, absorption.

We use the following hypothesis:

$$\omega \ll \omega_{ce}. \quad (1.6)$$

As we will see later, such an assumption is generally correct when the VLF emission takes place inside the plasmasphere. When the condition (1.6) is fulfilled, the energy diffusion of electrons occurs in a characteristic time τ_{DW} much larger than the time $\tau_{D\alpha}$ required for pitch-angle diffusion. (KENNEL and PETSCHERK, 1966; TVERSKOV, 1968.) After a time $t \sim \tau_{D\alpha}$ and in the absence of a permanent source of particles, the anisotropy has disappeared and γ becomes negative: the waves are absorbed. This characteristic time has to be compared with the characteristic times related with the finite geometry of the medium; we will discuss this point in the third part.

The hypothesis (1.6) enable us to simplify the expression of γ (1.4):

$$\gamma = \pi^2 \omega_{ce} |V_R| \int_0^\infty v_\perp dv_\perp \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} \Big|_{v_\parallel = V_R}. \quad (1.7)$$

The integration has to be performed with $v_\parallel = V_R$ so that

$$v_\perp = v_\parallel \operatorname{tg} \alpha = V_R \operatorname{tg} \alpha$$

and (1.7) becomes:

$$\gamma = \pi^2 \omega_{ce} |V_R|^3 \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} d\alpha. \quad (1.8)$$

When $\tau_{DW} \gg \tau_{D\alpha}$ the quasi-linear equation deals only with pitch-angle diffusion

1460

A. ROUX and J. SOLOMON

and we can write (KENNEL and PETSCHER, 1966; GENDRIN, 1968; TVERSKOY, 1968).

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = \pi \frac{q_e^2}{m_e^2} \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{\sin \alpha}{|v \cos \alpha|} B_{1k}^2 \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} \right\} \quad (1.9)$$

in which B_{1k}^2 is the wave power spectral density by unit of wave number, which is normally a function of k . But taking into account (1.6) we obtain

$$V_R \simeq - \frac{\omega_{ce}}{k} \quad (1.10)$$

so that we can also write B_{1k}^2 as a function of V_R .

We integrate (1.9) with respect to α , keeping v constant:

$$\int_0^\alpha \sin \alpha' \frac{\partial F_1(\alpha', v)}{\partial t} d\alpha' = \pi \frac{q_e^2}{m_e^2} \sin \alpha \frac{B_{1k}^2}{|v \cos \alpha|} \frac{\partial F_1}{\partial \alpha}. \quad (1.11)$$

Taking now B_{1k}^2 as a function of V_R and using the relation

$$V_R = v \cos \alpha$$

we can consider (1.11) as a function of α and V_R in both members.

We multiply (1.11) by:

$$\pi \omega_{ce} |V_R|^3 \frac{\sin \alpha}{\cos^4 \alpha}$$

on both sides. Then a second integration with respect to α , and with V_R constant, enables us to make appear γ under the form (1.8):

$$\pi \omega_{ce} |V_R|^3 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \alpha}{\cos^4 \alpha} \left\{ \int_0^\alpha \sin \alpha' \frac{\partial F_1}{\partial t} d\alpha' \right\} d\alpha = \frac{q_e^2}{m_e^2} \gamma_k \frac{B_{1k}^2(|V_R|)}{|V_R|}. \quad (1.12)$$

Now we take into account the wave energy conservation equation:

$$\frac{\partial B_{1k}^2}{\partial t} = 2 \gamma_k B_{1k}^2 \quad (1.13)$$

so we can rewrite (1.12):

$$\pi \omega_{ce} |V_R|^3 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \alpha}{\cos^4 \alpha} \left\{ \int_0^\alpha \sin \alpha' \frac{\partial F_1}{\partial t} d\alpha' \right\} d\alpha = \frac{q_e^2}{m_e^2} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [B_{1k}^2(|V_R|)] \quad (1.14)$$

which can be integrated with respect to time between $t = 0$ and t .

Neglecting the initial value of B_{1k}^2 we obtain:

$$B_{1k}^2(|V_R|, t) = 2\pi \omega_{ce} \frac{m_e^2}{q_e^2} V_R^4 \int_0^{\pi/2} d\alpha \frac{\sin \alpha}{\cos^4 \alpha} \int_0^\alpha d\alpha' \sin \alpha' \left[F_1 \left(\alpha', \frac{V_R}{\cos \alpha}, t \right) - F_1 \left(\alpha', \frac{V_R}{\cos \alpha}, 0 \right) \right]. \quad (1.15)$$

If t is taken equal to $\tau_{D\alpha}$, $F_1(t)$ is no longer a function of α' and one obtains the spectrum which corresponds to a relaxation towards complete isotropy.

Whatever is the final time which is chosen, $B_{1k}^2(t)$ is a function of V_R and, through the relation (1.10) and the dispersion equation, is a function of frequency.

Application of equation (1.15) to some specific initial distribution functions will be made in the next section.

2. INFLUENCE OF THE MAGNETOSPHERIC PARAMETERS ON THE SPECTRAL SHAPE OF THE EMITTED WAVES

2.1 Analytical expression of the spectrum for a particular distribution

In this part, we suppose that the length of the medium (in the B_0 direction) is larger than the characteristic length associated with pitch-angle diffusion, so that the amplifying medium can be considered as infinite and the total anisotropy relaxation can occur. We assume a warm particle distribution function of the following form:

$$F_1(\alpha, v) = \frac{n_1}{n_0 \pi^{3/2} v_0^3} K_m \exp\left(-\frac{v^2}{v_0^2}\right) \sin^m \alpha \quad (2.1)$$

K_m being the normalization coefficient with respect to α (see equation (1.3)). With such a distribution, the anisotropy which is defined by equation (1.5), is $A_s = m/2$ (LIEMOHN, 1967).

Using the expression (2.1) for the initial distribution function and assuming that the total relaxation towards a complete isotropy ($m = 0$) has been achieved at the time $t = \tau_{D\alpha}$, we obtain from (1.15) the final spectrum:

$$\frac{B_{1f}^2(|V_R|, \tau_{D\alpha})}{f_{ce}} = 4\pi^{3/2} \frac{n_1 m_e^2}{n_0 q_e^2} \left(\frac{V_A}{v_0}\right)^3 x^{-5/2} K_m \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \alpha}{\cos^4 \alpha} \exp\left(-\frac{V_A^2}{x v_0^2 \cos^2 \alpha}\right) M_m(\alpha) d\alpha \quad (2.2)$$

with

$$B_{1f}^2 = \frac{2\pi}{V_g} B_{1k}^2. \quad (2.3)$$

B_{1f}^2 is the power density of the wave magnetic field by unit of frequency

$$x = \frac{f}{f_{ce}}, f \text{ frequency of the wave and } f_{ce} = \frac{\omega_{ce}}{2\pi},$$

$$V_A = c \frac{f_{ce}}{f_{pe}}, \text{ electron Alfvén velocity and}$$

f_{pe} , plasma frequency of the electrons.

In order to write (2.2), we have used KENNEL and PETSCHER's (1966) formulas giving the relation between V_R and V_g for the whistler mode:

$$\frac{V_R}{V_A} \simeq x^{-1/2}; \quad \frac{V_g}{V_A} \simeq 2x^{1/2} \quad (2.4)$$

where V_g is the group velocity.

The expressions of K_m and $M_m(\alpha)$ are given in Table 1.

Table 1. Expressions of K_m and $M_m(\alpha)$ as a function of m

m	K_m	$M_m(\alpha)$
1	$4/\pi$	$\pi/4 (1 - \cos \alpha) - \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4}$
2	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3} \cos \alpha - \frac{1}{3} \cos^3 \alpha$
3	$16/3\pi$	$\frac{3\pi}{16} (1 - \cos \alpha) - \frac{3\alpha}{8} + \frac{\sin 2\alpha}{4} - \frac{\sin 4\alpha}{32}$
4	$\frac{15}{8}$	$\frac{11}{120} (\cos \alpha - 1) + \frac{5}{48} (1 - \cos 3\alpha) - \frac{1}{80} (1 - \cos 5\alpha)$

We give now another expression for (2.2), which we have used for computations:

$$\frac{B_{1f}^2}{f_{ce}} = 0.7 \cdot 10^3 \cdot \left(\frac{V_A}{V_0} \right)^3 \cdot \frac{n_1}{n_0} x^{-5/2} K_m \quad (2.5)$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin \alpha}{\cos^4 \alpha} \exp - \left(\frac{V_A^2}{x V_0^2 \cos^2 \alpha} \right) M_m(\alpha) d\alpha$$

where B_{1f}^2 is expressed in $(m\gamma)^2 \cdot \text{Hz}^{-1}$ and f_{ce} in Hz.

2.2 Numerical results: Influence of the magnetospheric parameters

We are going to use equation (2.5) for numerical computations and so to examine the role of the different parameters which enter this formula. All the computations are made with $n_1/n_0 = 10^{-3}$ which seems a good approximation of experimental data inside the plasmasphere. Let us notice that B_{1f}^2 is proportional to n_1/n_0 .

Comparison of the linear and the quasi-linear theory. In the linear theory, the electromagnetic field which is emitted depends strongly on its initial value, which is unknown. Furthermore, the linear theory predicts an exponentially growing wave field which would lead quickly to an extremely high level of the field. But this phenomenon does not occur because we have to consider simultaneously the reaction of the emitted waves upon the particles. The quasi-linear theory takes into account the modification of the particle distribution function during the process of the emission, due to the electromagnetic field. For example the frequency f_0 for which the power spectrum is maximum is different from the frequency f'_0 for which the initial linear growth rate is maximum. This is demonstrated in Fig. 1, which represents both the initial linear growth rate and the final wave spectrum. The fact that $f_0 < f'_0$ is due to the form of the diffusion coefficient. From equation (1.9) we see that this diffusion coefficient is:

$$D = \pi \frac{q_e^2}{m_e^2} \frac{B_{1k}^2}{|V_R|} \div \frac{B_{1k}^2}{|V_R|}. \quad (2.6)$$

But V_R varies like $f^{-1/2}$ (equation (2.3)), so that D is larger for high frequencies than for low frequencies. Therefore the growth rate disappear first in the high frequency range and the total wave field is more important in the low-frequencies range.

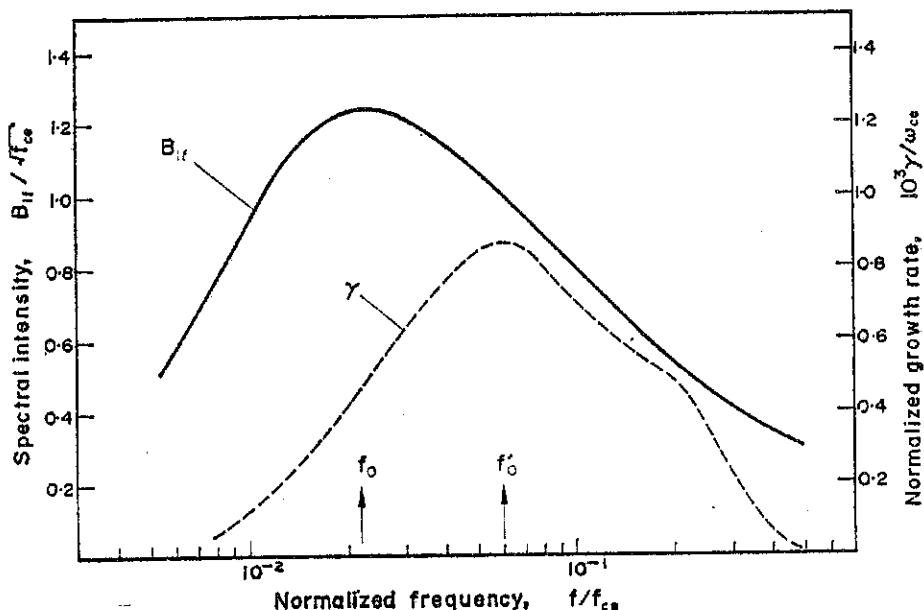


Fig. 1. Linear and quasi-linear theory. Dashed line: Theoretical initial growth rate in the linear approximation (right-hand scale) obtained with a ratio $n_1/n_0 = 10^{-3}$, an e -folding velocity $v_0 \approx 7 V_A$ and an initial anisotropy $A = m/2 = 1.5$. The normalized frequency corresponding to the maximum growth rate is $f'_0/f_{ce} = 6 \times 10^{-2}$. Continuous line: Theoretical spectrum obtained by the quasi-linear theory, after complete isotropization of the distribution function has taken place. The initial parameters are the same. The normalized frequency corresponding to the maximum spectral power density is $f_0/f_{ce} = 2.2 \times 10^{-2}$.

Influence of the anisotropy. Figure 2 shows the influence of the initial parameter m upon the spectral shape of the final spectrum; the frequency f_0 changes only slightly with m . On the contrary, the absolute value of the maximum intensity varies strongly with m , especially for $m \leq 1$. From our numerical computations, we are able to deduce the following approximate expression:

$$B_{1f_0}^2 \doteq m_i^{1/3} \quad (2.7)$$

m_i being the initial value of the anisotropy parameter. The variation is important only for small values of m . Consequently, the intensity which is obtained for a relaxation from $m = 4$ to $m = 0$ is almost the same as the one which is obtained for a relaxation between $m = 1$ and $m = 0$. So we do not need large values of the initial anisotropy for getting large values of the VLF field.

Influence of the ratio V_A/v_0 . The magnetic energy per particle is $\frac{1}{2} m_i V_A^2$ and the mean kinetic energy of a particle is $3 mv_0^2/4$, if one assumes a distribution function given by equation (2.1). Thus $(V_A/v_0)^2$ is proportional to the ratio of these two energies.

In Fig. 3, the spectral shape and intensity of the final spectrum of the emitted waves, are given for two values of V_A/v_0 .

The intensity and the frequency f_0 of the spectrum depend strongly upon the ratio V_A/v_0 . From our numerical computations we get approximatively:

$$(f_0/f_{ce}) \doteq (V_A/v_0)^2 \quad (2.8)$$

$$B_{1f_0}^2 \doteq (v_0/V_A)^2. \quad (2.9)$$

1464

A. ROUX and J. SOLOMON

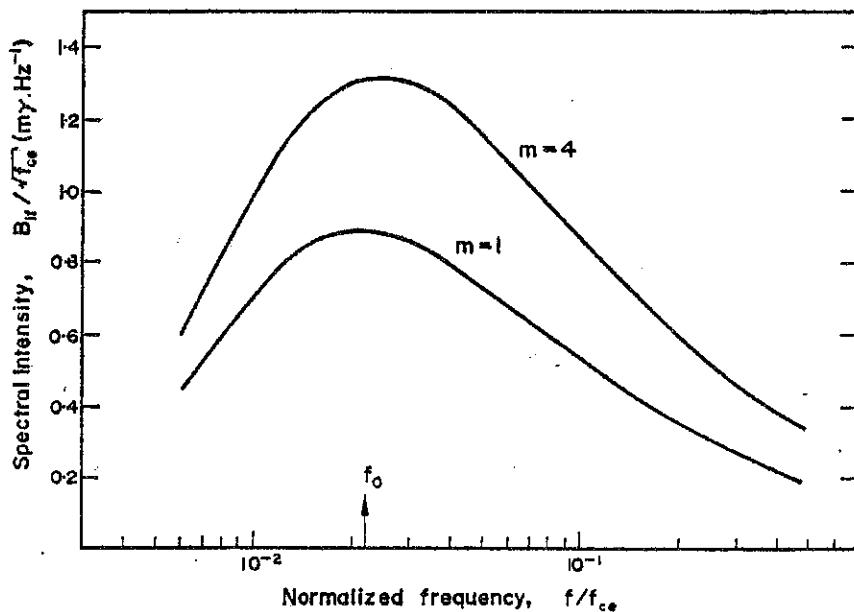


Fig. 2. Theoretical spectra obtained with an initial ratio $n_1/n_0 = 10^{-3}$, an initial e-folding velocity $v_0 = 7 V_A$ and two different anisotropies $A_e = m/2 = 2$ and $A_e = 1/2$. The normalized frequency corresponding to the maxima of the spectra is around 2.2×10^{-2} .

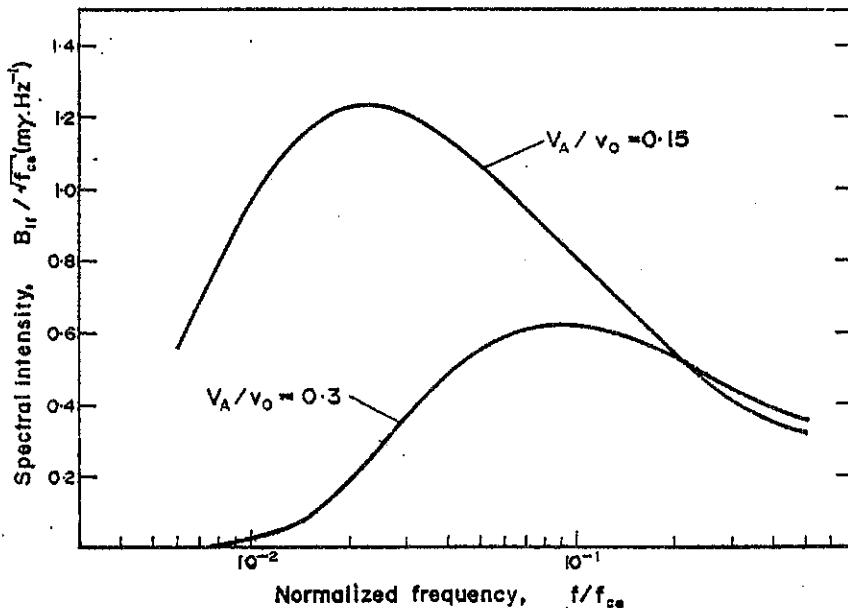


Fig. 3. Theoretical spectra obtained with an initial ratio $n_1/n_0 = 10^{-3}$ and an initial anisotropy $A = m/2 = 1.5$. The e-folding velocity are respectively $v_0 \simeq 7 V_A$ and $v_0 \simeq 3 V_A$. For the first curve ($v_0 \simeq 7 V_A$) we have $B_{1f} \sqrt{f_{ce}} \simeq 1.23$ and $f_0/f_{ce} \simeq 2.2 \times 10^{-2}$. For the second one $B_{1f} \sqrt{f_{ce}} \simeq 0.62$ and $f_0/f_{ce} \simeq 9 \times 10^{-2}$.

But, remembering that V_A/v_0 does not vary too much inside the plasmasphere, we see that the spectral shape and the maximum amplitude of the VLF hiss will not depend too much upon the line of force on which the interaction takes place.

Knowing the influence of the magnetospheric parameters upon the spectrum we now will try to take into account the finite geometry of the medium.

3. CASE OF A BOUNDED PLASMA

3.1 Diffusion time of the particles and transit time of the waves

If the plasma is bounded, there is a transit time θ of the waves through the amplifying zone. So the interaction between waves and particles is limited by this transit time θ and it is necessary to compare θ and the relaxation time $\tau_{D\alpha}$.

To calculate $\tau_{D\alpha}$ we use the diffusion equation (1.9). In a first approximation, we assume that:

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} \sim \frac{F_1}{\tau_{D\alpha}}. \quad (3.1)$$

Then we put the particular expression (2.1) of F_1 in the second member of (1.9). After the two derivations we obtain:

$$\tau_{D\alpha} \sim 2 \frac{m_e^2 V_R}{q_e^2 V_\sigma} \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{m^2 B_{1f}^2} \quad (3.2)$$

in which use has been made of equation (2.3). With equation (2.4) we can also write:

$$\tau_{D\alpha} \sim \frac{m_e^2 f_{ce}}{q_e^2 f} \frac{1}{m^2} \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{B_{1f}^2}.$$

Obviously, for each initial value of α , there is a value of $\tau_{D\alpha}$. One can compute a mean value for a given resonant velocity by integrating over α (V_R being kept constant). One obtains:

$$\langle \tau_{D\alpha} \rangle \sim \frac{m_e^2 f_{ce}}{q_e^2 f} \frac{1}{m^2} \frac{1}{B_{1f}^2}. \quad (3.3)$$

For $m \sim 1$, this value is not much different from the one given by KENNEL and PETSCHERK (1966). They calculate the distribution function in the stationary case and they deduce the corresponding anisotropy (their equations 3.10, 4.12 and 4.16); then the life-time (as expressed in our notation) is:

$$T_L \sim \frac{m_e^2}{q_e^2} \frac{1}{B_{1f}^2} \frac{V_R}{V_\sigma} \frac{2\pi}{m}.$$

Numerical estimation of $\langle \tau_{D\alpha} \rangle$ can be made by assuming:

$$\frac{f_{ce}}{f} \sim 10; 1 < m < 4; 1 \leq B_{1f}^2 \leq 10 \text{ (my)}^2 \text{ Hz}^{-1};$$

one obtains:

$$1s \leq \langle \tau_{D\alpha} \rangle \leq 300 \text{ sec.}$$

We define the transit time θ of the waves as

$$\theta = \frac{\mathcal{L}}{V_\sigma}$$

where \mathcal{L} is the length of the amplifying zone. This length has received a semi-quantitative definition by HELLIWELL (1967).

1466

A. ROUX and J. SOLOMON

For instance, with $\mathcal{L} \sim 2000$ km, $f_{ce} = 10$ kHz, $f_{pe} = 100$ kHz, we obtain:

$$\theta \sim \frac{1}{10} \text{ sec.}$$

Thus, in general the following inequality holds inside the plasmasphere:

$$\theta \ll \tau_{D\alpha}. \quad (3.5)$$

Therefore it is necessary to take into account the energy which is lost by the waves escaping from the amplifying zone. For doing this we must modify equation (1.13). This is the subject of the next paragraph.

3.2 Diffusion equations in a bounded plasma

Taking into account the results of the above paragraph and assuming that the strong inequality $\omega \ll \omega_{ce}$ is fulfilled, we obtain two coupled equations (KENNEL and PETSCHERK, 1966):

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = \pi \frac{q_e^2}{m_e^2 \sin \alpha} \frac{1}{\partial \alpha} \left[\frac{\sin \alpha}{|v \cos \alpha|} \right] B_{1k}^2 \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} + S(\alpha, v) \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial B_{1k}^2}{\partial t} + V_s \frac{\partial B_{1k}^2}{\partial z} = 2 \gamma_k B_{1k}^2 \quad (3.7)$$

where $S(\alpha, v)$ describes the particle source and $V_s \frac{\partial B_{1k}^2}{\partial z}$ the energy loss by waves escaping from the amplifying zone. We will restrict ourselves, here, to the case of an injection which takes place in a much shorter time than the diffusion time, so that the source term can be omitted: $S(\alpha, v) = 0$. Such a case is completely different from the stationary case that has been studied by KENNEL and PETSCHERK.

With the new equations (3.6) and (3.7) equation (1.14) becomes:

$$\pi \omega_{ce} |V_R|^3 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \alpha}{\cos^4 \alpha} \left(\int_0^\alpha \sin \alpha' \frac{\partial F_1}{\partial t} d\alpha' \right) d\alpha = \frac{q_e^2}{m_e^2} \frac{1}{2 |V_R|} \left[\frac{\partial B_{1k}^2}{\partial t} + V_s \frac{\partial B_{1k}^2}{\partial z} \right]. \quad (3.8)$$

But

$$V_s \frac{\partial B_{1k}^2}{\partial z} \sim \frac{V_s}{\mathcal{L}} B_{1k}^2 = \frac{B_{1k}^2}{\theta}. \quad (3.9)$$

The integration, with respect to time, of this term gives, as a definition:

$$\frac{1}{\theta} \int_0^{\tau_{D\alpha}} B_{1k}^2(t) dt = \frac{\tau_{D\alpha}}{\theta} \langle B_{1k}^2 \rangle \quad (3.10)$$

where $\langle B_{1k}^2 \rangle$ is the mean value, with respect to time, of the emitted field. Because of the loss of the waves at the end of the amplifying zone the final wave field, after time $t \sim \tau_{D\alpha}$, is zero. We can also neglect the initial wave field as compared to $\langle B_{1k}^2 \rangle$. So that the only contribution, in an integration with respect

to time, of the second member of equation (3.8) is equation (3.10). Therefore the integration of equation (3.8) between $t = 0$ and $t = \tau_{D\alpha}$ gives:

$$\langle B_{1k}^2 \rangle \sim \frac{\theta}{\tau_{D\alpha}} \cdot B_{1k}^2(\tau_{D\alpha}) \quad (3.11)$$

where $B_{1k}^2(\tau_{D\alpha})$ is given by equation (1.15). One could have thought of iterating this equation: taking an estimated value of $\langle B_{1k}^2 \rangle$, one could compute $\tau_{D\alpha}$ by equation (3.3). Then equations (3.11) and (1.15) would have given a new value for $\langle B_{1k}^2 \rangle$. Unfortunately, both equations (3.3) and (3.11) give in fact only the product $\langle B_{1k}^2 \rangle \tau_{D\alpha}$. In a certain sense, this is normal: integrating only between the initial and the final state in a lossy medium we cannot determine the intermediate steps. In other words, with a given energy source (anisotropy) we cannot say if there is a high level field emitted during a short time or a low level one emitted during a long time. This ambiguity, which is due to the losses, can be removed if one follows the time development of the phenomenon, solving numerically the diffusion equation simultaneously with the field equation; or if we get independent measurements of the life-times.

3.3 Numerical results

Nevertheless equation (3.3) gives $\langle B_{1k}^2 \rangle \tau_{D\alpha}$ as a function of f/f_{ce} and m , whereas equations (3.11) and (1.15) give it as a function of n_1/n_0 , f/f_{ce} , V_A/v_0 and m . If one wants to compare with experimental data, first we will try to fix f_0/f_{ce} ; therefore V_A/v_0 is determined. Thus the compatibility of equations (3.3) and (3.11) plus (1.15) leads to a certain relationship between n_1/n_0 and m . Assuming that n_1/n_0 is given, m is thus determined. But only the product $\langle B_{1k}^2 \rangle \tau_{D\alpha}$ is obtained. Such a procedure has been applied in order to interpret the experimental data of RUSSEL *et al.* (1968). Figure 4 gives an example of the obtained results, in which the experimental and theoretical amplitude has been made equal. The general agreement is good, taking into account the fact that we have made the computations for a limited set of parameters m and V_A/v_0 . The value of m which is obtained ($m \approx 1$, $A \approx 0.5$) is compatible with the theoretical value of KENNEL and PETSCHER (1966), but smaller than the one which is deduced by PARKS (1970) from his measurements on board ATS-1. The value of $\tau_{D\alpha}$ that we get (~ 200 sec) is also compatible with the life-times experimentally measured on board a rocket at this L -value (ETCHETO *et al.*, 1970). But the mean kinetic energy of the particles that we are obliged to assume is very high in this case ($\bar{E} \simeq 250$ keV). Such a value is not usual for this range of L ; therefore, we give, in Fig. 5, another example of such a theoretical spectrum with a more usual mean kinetic energy for particles.

In Fig. 6 we compare the case of a spectrum inside the plasmasphere and of a spectrum outside the plasmasphere. The value of the cold plasma density n_0 must be modified when we are outside the plasmasphere, whereas the density of hot particles, n_1 , can be taken equal on both sides of this boundary. In Table 2, some characteristic values on both sides of the plasmasphere are given.

Outside the plasmasphere the maximum of the spectrum is displaced towards higher frequencies; thus the condition $\omega \ll \omega_{ce}$ may be more difficult to satisfy. Hence it would be necessary to include energy diffusion. The complete diffusion

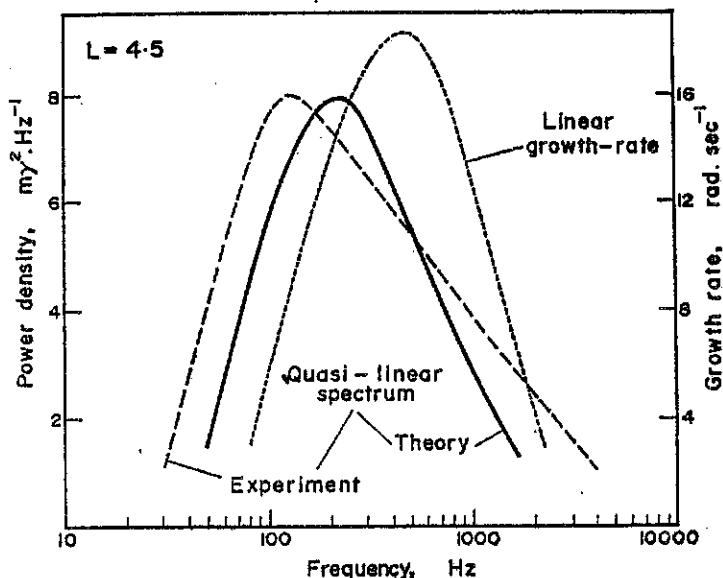


Fig. 4. Limiting spectra of VLF waves. Thick continuous line: Theoretical spectrum obtained at $L = 4.5$ with an initial ratio $n_1/n_0 = 10^{-3}$, an initial e-folding velocity $v_0 \simeq 7 V_A$ ($\bar{E} \simeq 250$ keV) and an initial anisotropy $A = m/2 = 0.5$. The frequency f_0 is around 200 Hz and the integrated intensity is of the order of 45 mV; the diffusion time is ~ 200 sec. Thick dashed line: experimental spectrum obtained by RUSSEL *et al.* (1968) and reported by ROBERTS (1969). The frequency f_0 is 130 Hz and the integrated intensity is of the order of 50 mV. Thin dotted line: The theoretical value of the linear growth rate under the same conditions is also represented for sake of completeness.

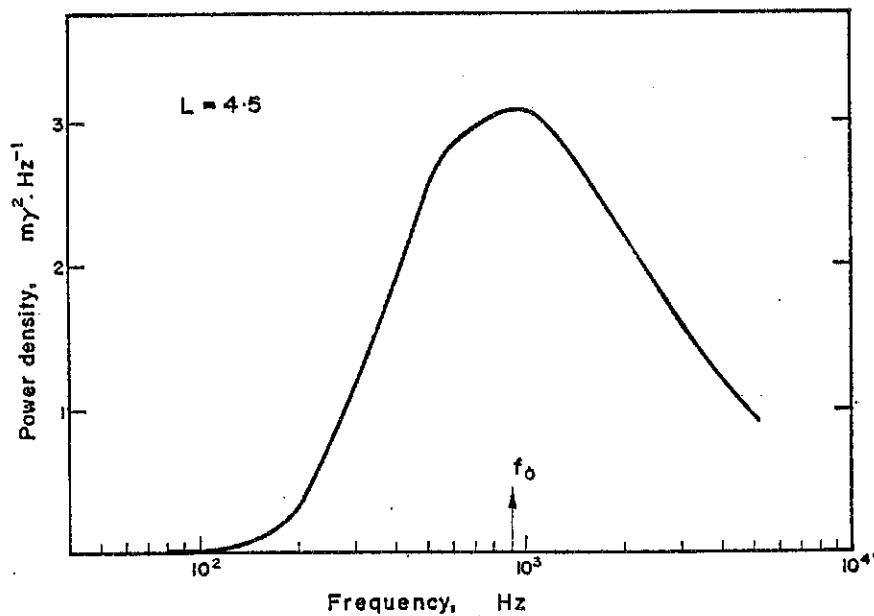


Fig. 5. Limiting spectra of VLF waves. Theoretical spectrum obtained at $L = 4.5$ with an initial ratio $n_1/n_0 = 10^{-3}$, an initial e-folding velocity $v_0 \simeq 3 V_A$ ($\bar{E} \simeq 40$ keV) and an initial anisotropy $A = m/2 \simeq 0.5$. The frequency f_0 is around 900 Hz and the integrated intensity is of the order of 80 mV; the diffusion time is ~ 100 sec.

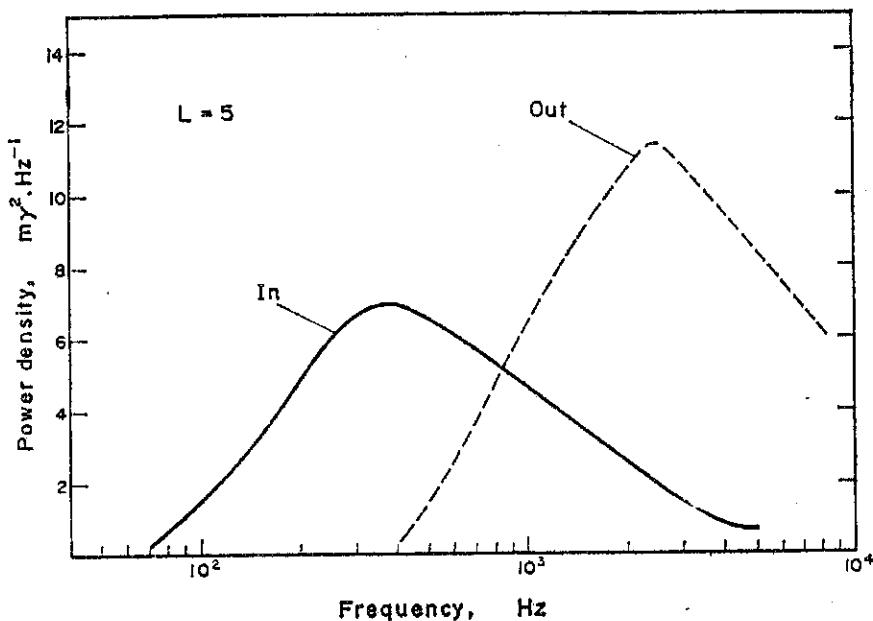


Fig. 6. Limiting spectra of VLF waves. Continuous line: Theoretical spectrum obtained inside the plasmasphere with an initial anisotropy $A = m/2 = 0.5$. The frequency f_0 is around 400 Hz and the diffusion time is ~ 100 sec. Dashed line: Theoretical spectrum obtained outside the plasmasphere with the same L value and the same initial anisotropy. The frequency f_0 is around 2500 Hz and the diffusion time is ~ 10 sec. The two spectra are computed for $L = 5$ ($f_{ce} \approx 10$ kHz).

Table 2. Comparison of the parameters inside and outside the plasmasphere for $L \approx 5$, and of the characteristic numbers of the two spectra of Fig. 6

Inside the plasmasphere	Outside the plasmasphere
$n_0 = 10^8 \text{ m}^{-3}$	$n_0 = 10^7 \text{ m}^{-3}$
$n_1/n_0 = 10^{-3}$	$n_1/n_0 = 10^{-2}$
$f_{ce} \approx 10^4 \text{ Hz}$	$f_{ce} \approx 10^4 \text{ Hz}$
$f_{pe} \approx 10^6 \text{ Hz}$	$f_{pe} \approx 3 \times 10^4 \text{ Hz}$
$V_A \approx 3 \times 10^7 \text{ m sec}^{-1}$	$V_A \approx 9 \times 10^7 \text{ m sec}^{-1}$
$E \approx 100 \text{ keV}$	$E \approx 100 \text{ keV}$
$V_A/v_0 \approx 0.2$	$V_A/v_0 \approx 0.6$
$f_0 \approx 400 \text{ Hz}$	$f_0 \approx 2500 \text{ Hz}$
$x_0 \approx 4 \times 10^{-2}$	$x_0 \approx 0.25$
$V_{g0} \approx 10^7 \text{ m sec}^{-1}$	$V_{g0} \approx 8 \times 10^7 \text{ m sec}^{-1}$
$\theta = \frac{\varphi}{V_{g0}} \approx 2/10 \text{ sec}$	$\theta \approx 1/50 \text{ sec}$
$B_{1/f_0}^2 \approx 7(\text{mV})^2 \text{ Hz}^{-1}$	$B_{1/f_0}^2 \approx 11.5(\text{mV})^2 \text{ Hz}^{-1}$

problem is a rather difficult one, although some progresses for its solution have been achieved by TVERSKOY (1968), KENNEL (1969) and HAERENDEL (1970). Outside the plasmasphere, $1/3$ is a typical value for ω/ω_{ce} (RUSSEL *et al.*, 1968), so that the pitch-angle diffusion coefficient is approximatively 10 times the energy diffusion coefficient; the isotropisation begins first, then energy diffusion takes place. In such cases, the precise knowledge of the wave field spectrum due to isotropisation would be of a great interest for further development of the energy diffusion problem.

1470

A. ROUX and J. SOLOMON

CONCLUSION

It is somewhat difficult to formulate the conclusions of the quasi-linear theory in a manner which can be verified experimentally. Various attempts have been achieved recently which try to show that the limiting flux introduced by KENNEL and PETSCHER (1966) well governs the VLF emissions. There are many experimental difficulties particularly the fact that usually waves and particles were not measured on board the same satellite. It is perhaps the reason why CAUFFMAN and GURNETT (1969) have concluded negatively. Other authors concluded positively and claimed that there exists a good correlation between flux near or above the limiting flux and VLF occurrence (RYCROFT, 1970). PARKS (1970), GENDRIN *et al.* (1970) and ETCHETO *et al.* (1970) concluded also, from the experimental study of the diffusion life-times, to the validity of the predictions based upon the limiting flux and on the quasi-linear theory. We have proposed here, in a dynamical case (the initially given anisotropy decreases with time) a method which permits to calculate the characteristics of the wave spectrum. As we have pointed out, it is not possible to obtain this spectrum from the linear theory. Furthermore the frequency f'_0 , which gives the position of the maximum of the initial growth rate, is quite different from the frequency f_0 ($f_0 < f'_0$) which gives the position of the maximum of the quasi-linear spectrum.

We have also studied the connection between spectra and magnetospheric parameters (n_1/n_0 , A_s , V_A/v_0). This connection gives us new possibilities concerning the experimental test of the quasi-linear theory of gyroresonant interactions.

We have neglected in our calculations the inhomogeneity of the medium along the field lines and the losses of particles in the loss cone. A more complete calculation should take into account these two points.

The lack of knowledge about injection and acceleration processes does not permit us to decide whether the hypothesis of total or partial relaxation of the anisotropy without permanent source is correct or not. For this purpose, more simultaneous experimental data about the spectrum of the waves, the anisotropy and lifetime of particles are needed.

Acknowledgements—We are pleased to acknowledge R. GENDRIN (Groupe de Recherches Ionosphériques), G. LAVAL and R. PELLAT (Centre d'Etudes Atomiques) for many valuable discussions. In particular R. GENDRIN helped us very much by his criticisms and suggestions during the redaction phase of this paper. We want also to acknowledge Mrs. J. ETCHETO (Groupe de Recherches Ionosphériques) for providing us in advance with her experimental results about the diffusion of particles.

REFERENCES

- | | | |
|---|------|--|
| ANDRONOV H. A. and
TRAKHTENGERTS V. V. | 1964 | <i>Geomag. Aeronomy</i> 4 , 181. |
| CAUFFMAN D. P. and GURNETT D. A. | 1969 | <i>J. geophys. Res.</i> 74 , 1144. |
| DRUMMOND W. E. and PINES P. | 1962 | <i>Nucl. Fusion Suppl.</i> 3 , 1049. |
| ETCHETO J., GENDRIN R. and
LEMAIRE D. | 1971 | <i>J. geophys. Res.</i> 76 , 1079. |
| GENDRIN R. | 1968 | <i>J. Atmosph. Terr. Phys.</i> 30 , 1313. |
| GENDRIN R. | 1970 | <i>Gyroresonant wave-particle interactions</i> ,
Invited review paper presented at the
International Symposium on Solar-Terrestrial Physics, Leningrad (USSR). |

Self-consistent solution of the quasi-linear theory

1471

- GENDRIN R., ETCHETO J. and
DE LA PORTE DES VAUX B.
HAERENDEL G. 1970 *J. geophys. Res.* **75**, 6169.
- HELLIWELL R. A. 1967 *J. geophys. Res.* **72**, 4773.
- KENNEL C. F. 1969 *Rev. Geophys.* **7**, 379.
- KENNEL C. F. and PETSCHEK H. E. 1966 *J. geophys. Res.* **71**, 1.
- LIEHMON H. B. 1967 *J. geophys. Res.* **72**, 39.
- PARKS G. K. 1970 *J. geophys. Res.* **75**, 3802.
- ROBERTS C. S. 1969 *Rev. Geophys.* **7**, 305.
- ROUX A. and SOLOMON J. 1970 *Annls. Géophys.* **26**, 279.
- RUSSEL C. T. and HOLZER R. E. 1970 *Particles and Fields in the Magnetosphere*
(Edited by B. M. McCORMAC) pp. 416-
428. Reidel, Dordrecht.
- RUSSEL C. T., HOLZER R. E. and
SMITH E. J. 1968 *Trans. Am. geophys. Un.* **49**, 259.
- RYCROFT M. J., THOMAS G. R. and
DALZIEL R. 1970 *On chorus bursts and outer radiation zone*
electrons. Paper presented at the
International Symposium on Solar
Terrestrial Physics, Leningrad (USSR).
- TVERSKOI V. A. 1968 *Soviet Phys. JETP* **26**, 821.

A Self-Consistent Theory of Magnetospheric ELF Hiss

JACQUELINE ETCHETO, ROGER GENDRIN,¹ JACQUES SOLOMON, AND ALAIN ROUX

*Groupe de Recherches Ionosphériques
Centre National d'Études des Télécommunications
Issy-les-Moulineaux, France*

A self-consistent solution of the equation of wave generation and particle diffusion is obtained for gyroresonant interactions between ELF waves (a few hundred hertz) and medium-energy electrons (a few tens of kev). A dynamic equilibrium is considered in which new particles are continuously injected and ultimately lost in the atmosphere through diffusion inside the loss cone; meanwhile, waves are generated continuously, but only a fraction of them is reflected by the ionosphere. By an iterative process the wave spectrum can be computed in shape as well as in amplitude; the distribution function of the trapped particles is also obtained. Some of the concepts that were introduced by Kennel and Petschek (1966) are more precisely defined, and attention is drawn to possible misapplications of these concepts. In particular, it is established that the so-called limiting flux does not have a unique value and that it in fact depends upon the source strength: enhancements by factors of up to 20 can be achieved in very disturbed conditions ($K_p \geq 6$). It is also demonstrated that the particle distribution function, in an equilibrium configuration, does not depend on the cold plasma density, a conclusion that is of great geophysical importance. A comparison with experimental data shows a reasonable agreement with the theory and establishes its interest for interpreting ELF hiss and equilibrium particle distributions, at least inside the plasma-sphere.

Most of the time the magnetospheric plasma is in a turbulent state. Electromagnetic waves are continuously observed, mainly inside the plasmasphere (see Russell *et al.* [1972] and references therein), and they cause continuous precipitation (drizzle) of particles. The trapped particle population exhibits almost always a marked anisotropy favorable in particular to cyclotron instability. New particles are continuously injected at different longitudes and radial distances via slow processes such as radial convection or diffusion and azimuthal drifts, which are the long-term consequences of more violent injections occurring during substorms. Therefore a situation exists that is a sort of dynamic equilibrium in which, at a given place, particles (and waves) are continuously injected (or generated) and precipitated (or absorbed). This equilibrium takes place in a time that is of the order of the particle lifetime (~ 100 sec), and therefore it can be achieved provided that the particle injection characteristics and the ionospheric reflection coefficient vary on a

longer time scale, which is a common situation except during very disturbed periods.

Many attempts have been made to solve the coupled equations that govern this process [Kennel and Petschek, 1966; Cocke and Cornwall, 1967; Haerendel, 1970; Eather and Carovillano, 1971; Roux and Solomon, 1971]. In none of them was the steady state situation studied in a truly self-consistent manner. Either a relaxation process is introduced, or an a priori distribution function for the particle or an a priori frequency spectrum for the waves is assumed. As a consequence, the formulas that give the so-called limiting flux and the diffusion strength are only approximate. The variation of these quantities with important parameters such as the source intensity or its characteristic energy has been concealed, and many erroneous conclusions have therefore been drawn concerning the global behavior of magnetospherically trapped particles. This paper presents a truly self-consistent solution of the steady state problem. The physical assumptions will be discussed next and are mainly due to the pioneer work of Kennel and Petschek [1966].

The electromagnetic field is the result of a gyroresonant interaction between the whistler

¹Now at the Physics Department, University of California at San Diego, La Jolla, California 92037.

mode and electrons of a few tens of kev. A source continuously injects new particles in the interaction region; thus the losses due to diffusion are compensated for. Therefore the trapped particle distribution function (TPDF), which remains anisotropic, does not present any time variation. On the other hand, the waves escape from the interaction region, and only a part of them is reflected by the ionosphere. A continuous generation, due to the stable anisotropy of the TPDF, compensates the wave losses, and the electromagnetic field has a spectrum that is time independent. On the basis of these assumptions, and with the help of some simplifying hypotheses, it is possible to compute the equilibrium TPDF and wave spectrum, which both depend on the characteristic parameters of the magnetospheric and ionospheric plasmas.

The first part of this paper (section A) deals with the basic equations of the theory from which we obtain the expression of the wave magnetic field as a function of frequency and the expression of the TPDF outside and inside the loss cone. More detailed analytical expressions can be obtained when the angular repartition of the source is isotropic. This is done in section B, in which we discuss the frequency variation of the TPDF anisotropy and in which we give a precise definition of the limiting flux first introduced by *Kennel and Petschek [1966]*. We also show that the concept of weak and strong diffusion can be quantitatively defined in terms of the source intensity.

In section C, results of practical computations of spectra and TPDF are presented, as well as their variation with different parameters (angular and energetic distribution of the source, Alfvén velocity of the cold plasma, etc.). It is shown that the results depend only slightly on the value that is assumed for the anisotropy of the source, therefore justifying the analytical developments made in section B. In section D, we compare some of the data that were obtained on board rockets or satellites with our theoretical results, and section E is devoted to a discussion of the validity of our hypotheses and to summary conclusions.

A. THEORY

1. Basic Assumptions

We will use the following notation:

- L McIlwain parameter.
 R_E earth's radius.
 B_0 equatorial intensity of the static magnetic field.
 z arc length along the line of force, measured from the equator.
 $V_e = c\Omega/\Omega_0$, electronic Alfvén velocity.
 \mathcal{L} length of interaction.
 e and m charge and mass of the electron.
 $\Omega/2\pi$ and $\Omega_0/2\pi$ electron gyrofrequency and plasma frequency.
 $x = \omega/\Omega$, reduced wave frequency.
 $E_0 = mV_{e0}^2/2$, characteristic energy of the distribution functions, usually in $\exp(-E/E_0)$.
 γ growth rate.
 V_g group velocity of the wave.
 B_{k^2} or B_r^2 spectral density of the electromagnetic field per unit wave number or per unit frequency.
 $V_r = (\omega - \Omega)/k$, resonant velocity.
 $v_{||}, v_{\perp}$ or v , α cylindrical or spherical coordinates of an individual particle in the velocity space (we assume no azimuthal dependence).
 α_0 loss cone angle.
 T_e time of escape of an electron at the equator, equal to a quarter of a bounce period.
 T_L particle lifetime.
 n_0 and n_1 cold and hot plasma densities.
 dn_1/dt rate of injection of hot particles (dn_1/dt is different from dn_0/dt because this last quantity must be equal to zero in an equilibrium situation).

The mechanism that we consider is the one that *Kennel and Petschek [1966]* described, by which a steady source of hot electrons continuously compensates the losses that are produced by diffusion into the loss cone and by which the growth rate of the electromagnetic field compensates the losses that are due to a bad ionospheric reflection toward the interaction region. But we duly take into account the frequency and the velocity dependence of these two processes: at each frequency the growth rate is defined by the equilibrium TPDF, and for each parallel velocity the diffusion strength is defined by the self-consistent wave spectrum.

Simplifying assumptions are needed for solving this problem. We assume that the gyroresonant interaction is the only one to take place, even

for particles having large pitch angles. We assume that the waves are propagating strictly along the magnetic field line ($k_1 = 0$), that the interaction takes place over a finite length \mathcal{L} , and that the medium is homogeneous over this length. All these assumptions need a thorough discussion, which will be presented in section E.

Other assumptions are made that are easier to admit. Although the computations give results in the whole frequency range ($0 < x < 1$), these results are valid only well above the ion gyrofrequency (because of the simplified form of the dispersion equation that we have chosen) and slightly below the electron gyrofrequency (because of the simpler form of the diffusion equation [Gendrin, 1968]). We assume also that $n_i \ll n_e$ because this leads to a simpler formula for the growth rate and allows us to write $B_k^2 = 2\pi B_k^2/V_s$. Finally, we assume that $\alpha_0 \ll 1$, so that $T_e \sim 1.4L R_s/v$ is independent of α . All these assumptions could be withdrawn without changing the physics of the problem; it would just be at the expense of an increased complexity in the computations.

2. General Equations

The plasma distribution function is written as

$$f(\alpha, v, z) = n_0 \left[\frac{1}{2\pi v} \delta(v) + f_0(\alpha, v) + f_1(\alpha, v, z) \right] \quad (1)$$

in which the first term describes the cold plasma, the second one describes the homogeneous part of the hot particle distribution function (the TPDF), and the third one describes its inhomogeneous part ($f_1 \ll f_0$).

It is shown in the appendix that the inhomogeneous part f_1 can be eliminated at the expense of an integration over z . Consequently, the diffusion equation becomes

$$\frac{\pi e^3}{m^2} \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\sin \alpha \langle B_k^2 \rangle}{|v_1 - V_s|} \frac{\partial f_0}{\partial \alpha} \right] + S(\alpha, v) - P(\alpha, v) = 0 \quad (2)$$

in which S and P are the integrated source and loss terms over the interaction length and

$$\langle B_k^2 \rangle = \frac{1}{\mathcal{L}} \int_{-\mathcal{L}/2}^{+\mathcal{L}/2} B_k^2(z) dz \quad (3)$$

The growth rate [Kennel and Petschek, 1966] is

$$\gamma = \pi^2 \Omega (1 - x)^2 \left[1 - \frac{x}{A(1 - x)} \right] |V_r|^3 \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^4 \alpha} \frac{\partial f_0}{\partial \alpha} d\alpha \quad (4)$$

in which the TPDF anisotropy A is given by

$$A = \int_0^{\pi/2} \frac{\tan^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \frac{\partial f_0}{\partial \alpha} d\alpha \cdot \left(2 \int_0^{\pi/2} \frac{\tan \alpha}{\cos^2 \alpha} f_0 d\alpha \right)^{-1} \quad (5)$$

The integrations in (4) and (5) have to be performed with $v_1 = V_r = \text{const}$. Therefore all the integrands have to be transformed into the variables α and v_1 . As V_r is related to the frequency through the resonance condition, A appears to be a function of frequency, a fact that will be discussed later.

The steady state energy conservation equation for the waves inside the interaction region, $V_s \partial B_k^2 / \partial z = 2\gamma B_k^2$, associated with the boundary conditions at the border of the interaction region and at the ionosphere leads easily to

$$R \exp(2\gamma \mathcal{L} / V_s) = 1 \quad (6)$$

in which R is the (power) reflection coefficient of the ionosphere.

3. Computation of the Electromagnetic Field

We follow the method that was described by Roux and Solomon [1971]. We integrate (2) twice, once keeping v constant and once keeping v_1 constant, and we make use of (4) and (6). We get

$$\langle B_k^2 \rangle = \frac{2\pi m^2 \Omega \mathcal{L}}{e^2 V_s \ln(1/R)} (1 - x^2) \cdot \left[1 - \frac{x}{A(1 - x)} \right] |V_r|^3 |V_r - V_s| \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \alpha}{\cos^4 \alpha} d\alpha \int_a^{\pi/2} (S - P) \sin \alpha' d\alpha' \quad (7)$$

The loss term P is efficient only inside the loss cone, and we will neglect it in (7) because of the small value of α_0 . Such a simplification could not be introduced for (p, L) interactions because of the charge exchange effects between

protons and neutral hydrogen, which are important even outside the loss cone [Gregory, 1971].

For the source term we choose an expression of the form

$$S(\alpha, v) = \left(\frac{K_p}{\pi^{3/2} V_0^3} \right) \left(\frac{1}{n_0} \frac{dn_2}{dt} \right) \cdot \sin^p \alpha \exp \left(- \frac{v^2}{V_0^2} \right) \quad (8)$$

in which the normalization factor K_p is given as a function of p by Roux and Solomon [1971] and dn_2/dt describes the intensity of the source; one gets an order of its magnitude by dividing the density of the trapped particles by their mean lifetime n_0/T_L , but a more precise determination will be given in section B.6.

Introducing the dispersion equation of the whistler mode, from which one easily gets V_r and V_s as a function of x , and replacing S in (7) by its value will give the expression of the steady state frequency spectrum of the self-consistent electromagnetic field. This expression still contains the anisotropy factor A , which, at the present stage of our computation, is unknown. Therefore an iteration procedure will be necessary, but before doing it we must obtain a first approximation of the TPDF.

4. The Equilibrium Distribution Function

Integrating (2) twice, keeping v constant, and assuming as before that $P = 0$ for $\alpha > \alpha_0$, we obtain the distribution function outside the loss cone:

$$f_0(\alpha, v) - f_0(\alpha_0, v) = \frac{2m^2}{e^2} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{|V_r - V_s| d\alpha'}{\langle B_f^2 \rangle V_s \sin \alpha'} \int_{\alpha'}^{\alpha''} S(\alpha'', v) \sin \alpha'' d\alpha'' \quad (9)$$

Inside the loss cone we assume that $P = f_0/T_*$ and that the source term is negligible, an assumption that is valid because $T_L \gg T_*$. Then, following Kennel and Petschek [1966], one finds

$$f_0(\alpha, v) = X(v) I_0[\alpha/(DT_*)^{1/2}] \quad (10)$$

with

$$D(x) = \frac{e^2 \langle B_f^2(x) \rangle V_s(x)}{2m^2 |V_r(x) - V_s(x)|} \quad (11)$$

in which I_0 is a modified Bessel function of the first kind and $X(v)$ is determined by the continuity of f_0 and $\partial f_0/\partial \alpha$ for $\alpha = \alpha_0$.

Equations 9 and 10 represent the steady state distribution for every value of α . We do not explicitly use these formulas in the general case, but a particular application is made in the next section.

B. ANALYTICAL RESULTS FOR $p = 0$

When $p = 0$, we can obtain analytical solutions that are of great interest because, as we will see later, the results in fact do not depend very much on the precise value of p .

1. Wave Spectrum

From (7), one gets

$$B_f^2(x) = \frac{\pi^{1/2} B_0^2 \tau}{\ln(1/R) \Omega n_0} \frac{dn_2}{dt} H(x) \quad (12)$$

with

$$H(x) = \frac{U(1-x)^2(1+2x)}{2x^2} \cdot \left[1 - \frac{x}{A(x)(1-x)} \right] \cdot \exp \left[- \frac{U^2(1-x)^3}{x} \right] \quad (13)$$

in which we introduce the quantities $\tau = \mathcal{L}/V_*$ and $U = V_s/V_*$. It is easy to compute the frequency for which the field is maximum. When $x \ll 1$ and the iteration on the anisotropy is neglected, one obtains

$$x_{\max} \simeq U^2/2 \quad (14)$$

$$B_{f,\max}^2 = \frac{2\pi^{1/2} \mu_0^2 e^2}{\exp(2)} \frac{n_0 \mathcal{L} V_0^3}{\Omega^3 \ln(1/R)} \frac{dn_2}{dt}$$

The electromagnetic power is directly proportional to the source intensity. However, in the strong diffusion limit, because of the presence of A in (13), the field increases less rapidly than dn_2/dt .

Assuming that $\mathcal{L} \sim L R_E$ (which corresponds to an interaction region extending up to 30° latitude on both sides of the equator), $R \sim 0.1$, and $E_0 \sim 5 \times 10^3 L^{-3}$ kev, one gets

$$x_{\max} \sim 2.4 \times 10^8 (n_0 L^3)^{-1} \quad (15)$$

$$B_{f,\max}^2 \sim 7.6 \times 10^{-13} n_0 L^{11/2} \frac{dn_2}{dt}$$

8154

ETCHETO ET AL.: SELF-CONSISTENT THEORY OF ELF HISS

in which B_f^2 is expressed in $\text{m}^2 \text{Hz}^{-1}$ and n_0 and n_2 are in m^{-3} . For an inbound crossing of the plasmapause ($L = \text{const}$) one sees that x_{\max} decreases and that $B_{f,\max}^2$ increases; thus the origin of the strong and quasi-permanent ELF hiss at the inner edge of the plasmapause is explained [Russell et al., 1972]. Taking $n_0 \sim 10^8 \text{ m}^{-3}$ and $L = 4$ and assuming $dn_2/dt \sim 10^2 \text{ m}^{-3} \text{ sec}^{-1}$ (a typical value as we will see later), one obtains $f_{\max} \sim 0.5 \text{ kHz}$ and $B_{f,\max}^2 \sim 15 \text{ m}^2 \text{ Hz}^{-1}$, values that are in good agreement with the experimental ones.

2. Directional Flux

We introduce the parameter $y = \alpha(DT_s)^{-1/2}$, which is a function of both α and x , through D . Usually, $y_0 = y(\alpha_0)$ defines the diffusion strength, but this quantity is frequency dependent, and a more precise definition must be given (section B.5). When $x \ll 1$, equations 9 and 10 give

$$f_0(\alpha, v) \approx \frac{2 \ln(1/R)}{\pi^2 \Omega V_0^2 \mathcal{L}} \left(\frac{V_a}{v} \right)^2 \cdot \exp \left(-\frac{v^2}{V_0^2} \right) \Phi(\alpha, v)$$

$$\Phi(\alpha, v) = I_0(y_0) \exp \left[\left(\frac{v \cos \alpha_0}{V_0} \right)^2 \right] \cdot [y_0 I_1(y_0) \cos \alpha_0]^{-1} + \int_{\alpha_0}^{\alpha} \exp \left[\left(\frac{v \cos \alpha'}{V_0} \right)^2 \right] \frac{2 d\alpha'}{\sin 2\alpha'} \quad \alpha > \alpha_0$$

$$\Phi(\alpha, v) = I_0(y) \exp \left[\left(\frac{v \cos \alpha_0}{V_0} \right)^2 \right] \cdot [y_0 I_1(y_0) \cos \alpha_0]^{-1} \quad \alpha < \alpha_0$$

from which it is possible to get the differential flux

$$j = n_0 v^2 f_0(\alpha, v) / m = j_1 + j_2 \quad (17)$$

where we have separated the term j_1 , which does not involve Bessel functions, and the term j_2 , which does and which therefore depends on the diffusion regime.

Outside the loss cone, the computations can be carried out in both approximations ($y_0 \ll 1$ and $y_0 \gg 1$). For $\alpha_0 \ll 1$, one gets

$$j_1 = k_1 \exp \left[- \left(\frac{v \sin \xi}{V_0} \right)^2 \right] \ln \left(\frac{\tan \alpha}{\tan \alpha_0} \right) \quad (18a)$$

$$j_{2w} = k_{2w} \left(\frac{v}{V_0} \right)^{1/2} \exp \left[- \frac{1}{2} \left(\frac{v}{V_0} \right)^2 \right] \quad (18b)$$

$y_0 \gg 1$

$$j_{2s} = k_{2s} \left(\frac{v}{V_0} \right) \exp \left[- \left(\frac{v}{V_0} \right)^2 \right] \quad (18c)$$

$y_0 \ll 1$

where $\alpha_0 \leq \xi \leq \alpha$ has an unknown value and comes from the mean value theorem. The constants k_1 , k_{2s} , and k_{2w} are given by

$$k_1 = \frac{1}{\pi^2 E_0 \mu_0 e^2} \frac{m}{\mathcal{L}} \frac{\Omega \ln(1/R)}{2} \quad (19a)$$

$$k_{2w} = \frac{1}{2\pi^{7/4} \alpha_0 E_0} \cdot \left[\left(\frac{m}{\mu_0 e^2} \right) \frac{2.8 L R_E \Omega \ln(1/R)}{\mathcal{L}} \frac{dn_2}{dt} \right]^{1/2} \quad (19b)$$

$$k_{2s} = \frac{1}{\pi^{3/2} \alpha_0^2 E_0} (1.4 L R_E) \frac{dn_2}{dt} \quad (19c)$$

Inside the loss cone, $j_1 = 0$, but the computations can be carried out only in the case of strong diffusion for which both y_0 and y are $\ll 1$. The value of j_2 that we get is equal to j_{2s} and does not depend on α as expected because in strong diffusion the TPDF is isotropic [Kennel and Petschek, 1966].

Looking at (18) and (19), one must emphasize the following facts:

1. The angular dependence of j , which outside the loss cone comes from j_1 only, does not depend on the diffusion regime. This was already visible in (9), S and B_f^2 being proportional to dn_2/dt ; thus the shape of the TPDF outside the loss cone is independent of the source strength.

2. Owing to the presence of $\sin \xi$ in (18a), the energy dependence of the trapped flux is not identical to the energy dependence of the source. The two variables α and E are no longer separable.

3. The cold plasma density does not appear in the expressions that give k_1 , k_{2w} , and k_{2s} . Consequently, the equilibrium TPDF is independent of the cold plasma density, a conclu-

sion that is of great geophysical importance and that we will discuss later.

3. Anisotropy

An approximate formula for the anisotropy can be obtained [Etcheto, 1972] that is valid when $x \ll 1$. Thus

$$A(x) \approx \frac{2x/U^2}{C^2(x) + 1.15C(x) + 2 + G(x)} \quad (20)$$

in which $C(x) = \ln [(U \tan \alpha_0)^2/x]$ and

$$G(x) = 8 \int_{\alpha_0}^{\pi/2} \exp \left(- \frac{U^2 \sin^2 \alpha_0}{x \cos \alpha} \right) \cdot \frac{I_0(y_0)}{y_0 I_1(y_0)} \tan \alpha \, d\alpha \quad (21)$$

where $G(x)$ depends on the diffusion regime. In weak diffusion, $G(x)$ is negligible, and one gets for $x = x_{\max}$ and $\alpha_0 \ll 1$:

$$A_{x_{\max}} \simeq [\ln (2\alpha_0^2)]^{-2} \quad (22)$$

which is slightly different from the formula, $A \sim 1/2 \ln (1/\alpha_0)$, given by Kennel and Petschek [1966, equation 4.16]. In strong diffusion, $G \sim 2xDT_s/(\alpha_0 U)^2$ and $A \sim \alpha_0^2/4DT_s$, where D is defined by (11).

In both cases, A is frequency dependent (Figure 7) and increases with frequency in the frequency range of interest. Therefore one cannot speak of the anisotropy of a distribution function.

4. Trapped Flux

By integrating (17) over energy ($E_1 < E < E_2$) and angle ($\alpha > \alpha_0$) one is able to get an expression for the integral trapped flux

$$J(E_1 < E < E_2) = J_1 + J_2 \quad (23)$$

where again we have separated the term J_1 , which does not depend on the diffusion regime, and the term J_2 , which does. Expressions for J_1 , J_{2w} , and J_{2s} may be found elsewhere [Etcheto, 1972]. These expressions involve coefficients K_1 , K_{2w} , and K_{2s} , which are very similar to k_1 , k_{2w} , and k_{2s} ; K_1 is a constant (involving only Ω , \mathcal{L} , and R), K_{2w} is proportional to $(dn_2/dt)^{1/2}$, and K_{2s} is proportional to dn_2/dt . Again, none of these coefficients involve the cold plasma density. Increasing this cold plasma density [Brice, 1970, 1971] will therefore have no permanent effect on

the trapped population. The equilibrium is governed by the source mechanism of hot particles and not by the cold plasma density. Of course, transient effects, which will mainly involve the low-energy part of the distribution, may be observed but on a time scale that is smaller than the time needed for reaching a new equilibrium situation, i.e., of the order of the minimum lifetime. This could explain why previous attempts at detecting such an effect were unsuccessful [Paulikas, 1972].

In many practical applications we must restrict ourselves to finite values of E_2 owing to the fact that very high energy particles interact with very low frequency waves ($x \ll x_{\max}$) for which the field intensity is very small; as a consequence, they take a long time to achieve their equilibrium. The same is also true for very low energy particles. For the purpose of the discussion, we will choose $E_1 = E_0/2$ and $E_2 = 2E_0$, therefore considering only the main part of the particle population.

5. Diffusion Strength and Limiting Flux

From (23) we see that, strictly speaking, there is no 'limiting flux' in the sense that, for each value of the source intensity, the equilibrium trapped flux establishes itself at a different value. But usually $J_1 \gg J_{2w}$ or J_{2s} ; we thus see the interest of the concept first introduced by Kennel and Petschek [1966]. However, J_1 is only a zero-order approximation (Figure 1). We see also that we can base the definition of the diffusion strength upon the source intensity instead of on the wave field intensity, which is frequency dependent. Kennel and Petschek avoided this difficulty by assuming a monotonic spectrum.

In a rigorous manner, the difference between the two regimes (weak and strong diffusion) should be based upon the actual ratio of dn_2/dt to a , a being the value of dn_2/dt for which $J_{2w} = J_{2s}$ (Figure 1). However, when $dn_2/dt = a$, the difference between the total flux J and the zero-order approximation J_1 is very small, and it is more meaningful to distinguish the cases for which the zero-order approximation is valid from the cases for which it is not. We thus define a limiting value of the source intensity b as the value for which $J_1 = J_{2s}$. If $dn_2/dt < b$, we will say that we are in weak diffusion. If $dn_2/dt > b$, we will say that

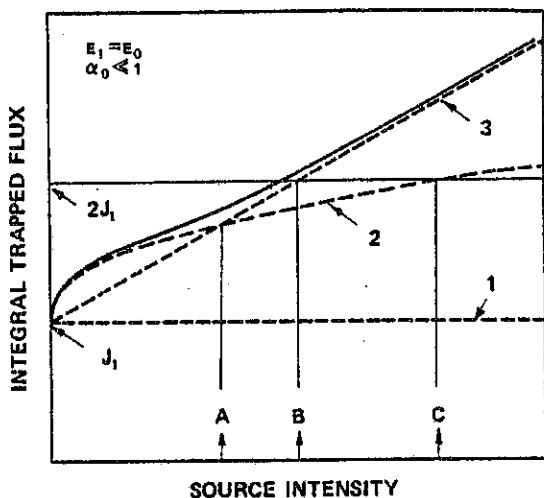


Fig. 1. Schematic representation of the equilibrium trapped flux as a function of source intensity. The solid curve represents the true variation of $J(>E_1)$ as a function of dn_s/dt . The dashed curves are approximations: 1, zero-order approximation J_1 [Kennel and Petschek, 1966]; 2, weak diffusion approximation J_{2w} ; 3, strong diffusion approximation J_{2s} . The relative values of A, B, and C depend on the value of α_0 ; here $\alpha_0 \ll 1$. The scales are linear.

we are in strong diffusion. We also define c as the value of dn_s/dt for which $J_1 = J_{2w}$. It is easy to show that, in the energy range $E_0/2 < E < 2E_0$, $a = 4.5b\alpha_0^2$ and $c = 0.22b/\alpha_0^2$, which justify the schematic drawing of Figure 1 ($a \ll b \ll c$ when $\alpha_0 \ll 1$). The limiting value b is

$$b = 4.7 \times 10^{-2} \left(\frac{m}{\mu_0 e^2} \right) \frac{\Omega \ln (1/R)}{1.4L R_s \mathcal{L}} \quad (24)$$

For $R \sim 0.1$ and $\mathcal{L} \sim L R_s$ one gets

$$b \sim 3 \times 10^5 / L^5 \text{ m}^{-3} \text{ sec}^{-1} \quad (25)$$

which gives for $L = 4$, $b \sim 3 \times 10^8 \text{ m}^{-3} \text{ sec}^{-1}$.

In the above discussion, we have considered the variation of J with the source intensity for a given energy range. We may also consider the variation of the zero-order flux with energy $J_1(>E_1)$. One has

$$J_1(>E_1) = \frac{2}{\pi \alpha_0^2} \frac{\Omega \ln (1/R)}{(\mu_0 e^2 / m) \mathcal{L}} \cdot \exp \left[- \left(\frac{V_1 \sin \nu}{V_0} \right)^2 \right] \quad (26)$$

with $\alpha_0 < \nu < \pi/2$. This expression has to be compared with Kennel and Petschek's [1966]

equation 5.2, which can be written, with our notation, when $V_1 \gg V_a$ as

$$J_1(>E_1) = \frac{\Omega \ln (1/R)}{(\mu_0 e^2 / m) \mathcal{L}} \frac{1 - (V_a/V_1)^2}{A - (V_a/V_1)^2} \quad (27)$$

Gendrin [1972] pointed out that (27) has no physical meaning because, besides the fact that A is not defined, the flux J_1 does not tend toward zero when E_1 increases. This fact is at the origin of many misuses of the concept of limiting flux in the literature when people try to compare the first part of (27), which is not energy dependent, with their experimental results, which are always energy dependent.

Our (26) shows a dependence of J_1 on energy. But, $\sin \nu$ being small, this dependence is not so strong as it seems at first glance, and even (26) should be used cautiously (section E).

6. Precipitated Flux and Lifetime

All the particles that are precipitated per time unit are the particles that have been introduced per time unit. It is therefore possible to relate the precipitated flux, which is a measurable quantity, with the source term, which is unknown. Thus

$$J_p(>E_1) = \pi \alpha_0^2 \int_{E_1}^{\infty} j_{2s} dE = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin \alpha d\alpha \int_{V_1}^{\infty} n_0 T_s S(\alpha, \nu) v^3 dv \quad (28)$$

By replacing T_s and S by their values, it is easy to show that both sides of the identity have the same energy dependence, as expected in the case of pure pitch angle diffusion. Specifying $E_1 = E_0$, we get $J_p(>E_0) = 0.4L R_s (dn_s/dt)$ or

$$dn_s/dt = (3.9 \times 10^{-7}/L) J_p(>E_0) \quad (29)$$

in mksa units. Note that J_p represents the flux that is precipitated in one hemisphere only.

The mean lifetime is obtained, for each energy, by dividing the differential trapped flux by the differential precipitated flux. In the strong-diffusion limit we obtain

$$T_L(v) = \frac{2T_s(v)}{\alpha_0^2} \left\{ 1 + \frac{k_1 V_0}{k_{2s} v} \exp \left[\left(\frac{v \cos \nu}{V_0} \right)^2 \right] \cdot \left| \ln \left(\tan \frac{\alpha_0}{2} \right) \right| \right\} \quad (30)$$

with $\alpha_0 < \nu < \pi/2$ (in fact, $\cos^2 \nu \sim 1$). Numerically, for $L = 4$,

$$T_L \sim \frac{2T_s}{\alpha_0^2} \left\{ 1 + \frac{3.6 \times 10^2}{dn_2/dt} \frac{V_0}{\nu} \cdot \exp \left[\left(\frac{\nu}{V_0} \right)^2 \right] \right\} \quad (31)$$

For high values of dn_2/dt ($\gtrsim 10^8 \text{ m}^{-3} \text{ sec}^{-1}$) the particle lifetime tends toward the minimum lifetime as expected in the case of strong diffusion. Here we see again that the diffusion strength is precisely defined by the source intensity factor. Equation 31 also shows that the lifetime increases when the particle energy increases, a fact that has been discussed in section B.4.

C. NUMERICAL RESULTS

In this section we give some of the numerical results that were obtained by applying the general formulas 7 and 9.

1. Wave Spectrum

In Figure 2, examples of the computed wave spectra are given. One sees that they do not depend very much on the specific value of

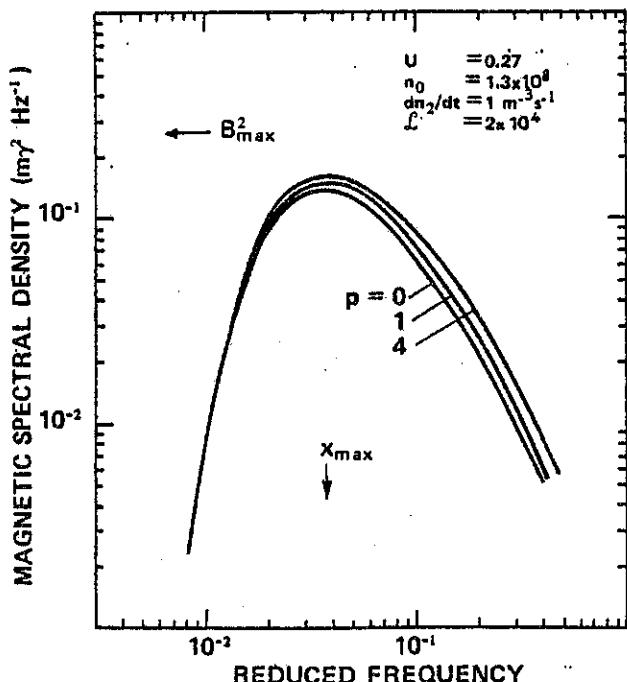


Fig. 2. Computed frequency spectra. The characteristic values of the magnetospheric parameters that have been assumed correspond to the inner edge of the plasmapause. Analytical values for $p = 0$ are given for comparison (arrows).

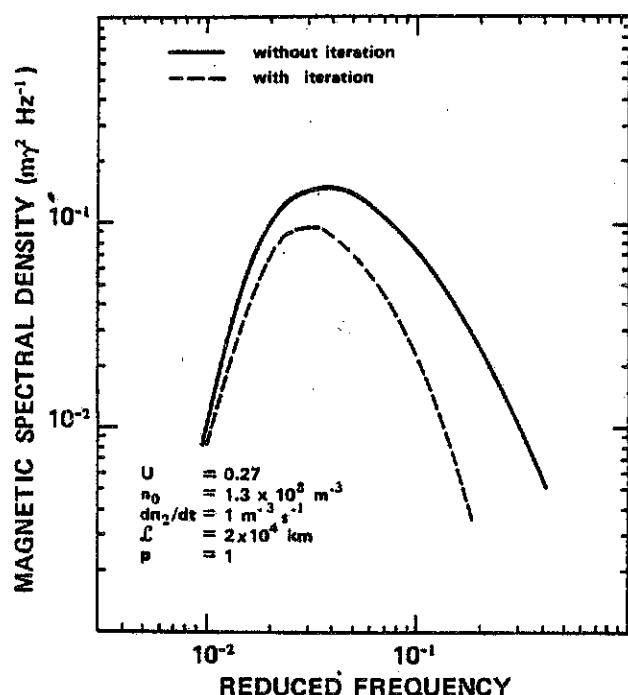


Fig. 3. Consequence of the iteration process on the wave frequency spectrum. The main effect of the iteration process appears at high frequencies.

the source pitch angle distribution, therefore justifying the assumption $p = 0$. We give also, for comparison, the theoretical values of x_{\max} and B_{\max}^2 given by (14).

The result of the iteration process, which is necessary because of the presence of $A(x)$ in (13), is presented in Figure 3. One sees that the effect is important only in the high-frequency part of the spectrum. The difference between the second and third iterations is negligible, the procedure converging very quickly except near $x = 1$.

In Figure 4 the change of the frequency spectrum with the characteristic energy of the source is represented. One sees that x_{\max} diminishes and B_{\max}^2 increases when V_0 increases. A similar variation would have been obtained by changing the conditions from outside the plasmasphere to inside the plasmasphere. However, in such conditions, not only U (through V_0) decreases, but also n_0 increases.

2. Differential Flux

In Figure 5 the pitch angle dependence of the directional flux is represented for two values of v ; outside the loss cone the energy spectra are different for different pitch angles, and they

8158

ETCHETO ET AL.: SELF-CONSISTENT THEORY OF ELF HISS

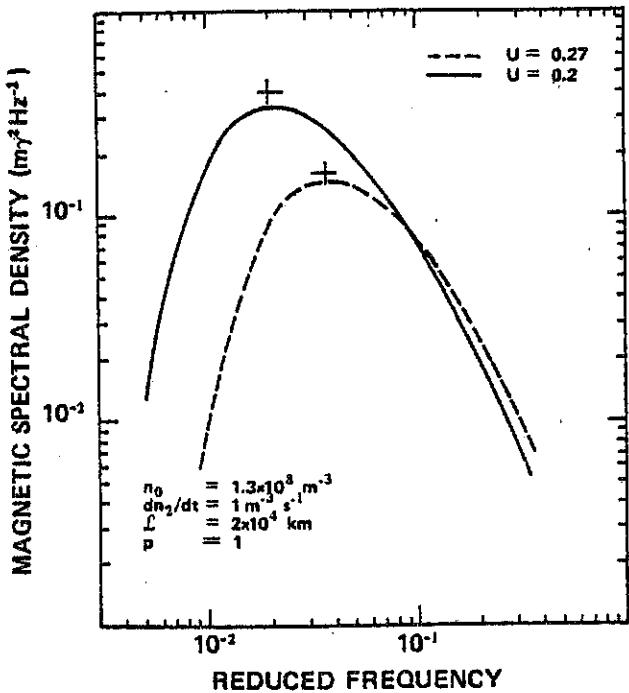


Fig. 4. Wave spectra for different values of the characteristic energy parameter; $U = V_s/V_0$. For comparison, the analytical values for $p = 0$ are also represented (crosses).

are different from the energy spectrum of the source.

The equilibrium distribution functions for three values of the source intensity are represented in Figure 6. One sees that the omnidirectional flux increases markedly with dn_s/dt ; strictly speaking, there is no limiting flux (Figure 1). One also sees that the precipitated flux increases more rapidly than the trapped flux, therefore explaining the lifetime diminution when one approaches the strong diffusion limit.

3. Anisotropy

The variation of the equilibrium anisotropy with frequency is represented in Figure 7. It can be seen that the anisotropy is far from being constant and varies by more than a factor of 2 within the bandwidth of the equilibrium spectrum.

The fact that the anisotropy increases rapidly when $x \rightarrow 1$ is because we have assumed $\gamma/V_s = \text{const}$. In our case, there is no critical frequency, and the anisotropy adjusts itself in such a way that (6) is always satisfied. Near $x = 1$ this is possible only if A takes greater and greater values. For very low frequencies the number of resonating particles decreases, but

V_s also decreases, and A remains small even for low x values. A flat minimum appears, which does not correspond to the maximum of the emitted field.

The anisotropy (for $x = x_{\max}$) is also a function of the source intensity (Figure 8). It remains constant for low source intensities and suddenly decreases when dn_s/dt becomes of the order of the limiting value b defined by (24). This corresponds to the fill-in of the loss cone when strong diffusion is reached.

4. Lifetime

We have plotted in Figure 9 the particle lifetime as a function of energy for different source intensities. We have also plotted the quantity $\tau_D/20$, which is the time the particles need to drift 12° in longitude. For weak source intensities ($\lesssim 100 \text{ m}^{-3} \text{ sec}^{-1}$) the particles are likely to leave the interaction region, because of their azimuthal drift, before they can reach an

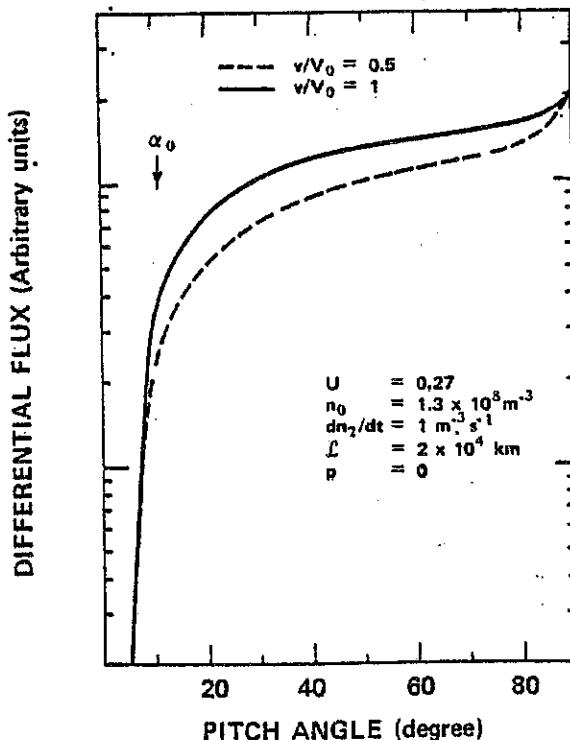


Fig. 5. The differential flux as a function of pitch angle for two different energies. The curves, which have been normalized at $\alpha = 89^\circ$ for computing facility, are given in arbitrary units. Because these curves are different for values of α greater than α_0 , the energy spectrum of the trapped particles is different at each pitch angle, and it is not similar to the energy spectrum of the source or to the energy spectrum of the precipitated particles.

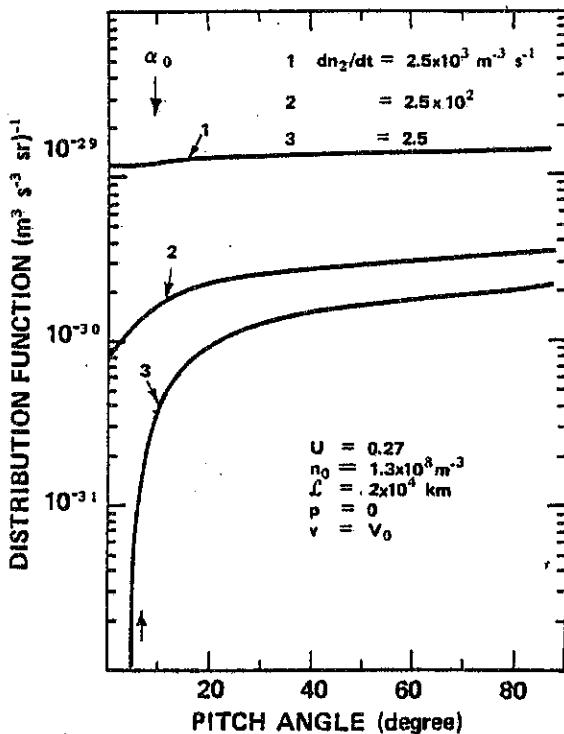


Fig. 6. Variation of the angular distribution function with the source intensity. The curves have been computed for an energy E equal to the characteristic energy of the source E_0 . Increasing the source intensity not only changes the angular distribution but also increases the total flux.

equilibrium situation. On the contrary, for large source intensities, particles will reach their equilibrium before any noticeable drift effect removes them from the interaction region. In all cases, the high-energy particles cannot reach their equilibrium with respect to the electromagnetic spectrum. This is another reason for considering only particles for which $E \lesssim 2E_0$ (section B.5).

D. COMPARISON WITH EXPERIMENTAL DATA

The comparison between our theory and experimental observations is very difficult because it is very seldom that waves and particles are measured simultaneously. Therefore the comparison can be made only on a statistical basis with results that were obtained independently at different places and often at different times. Nevertheless, some interesting consequences of the theory may be checked.

We will restrict our comparison to three different aspects: the wave spectrum and its relationships with the plasmasphere, the angular

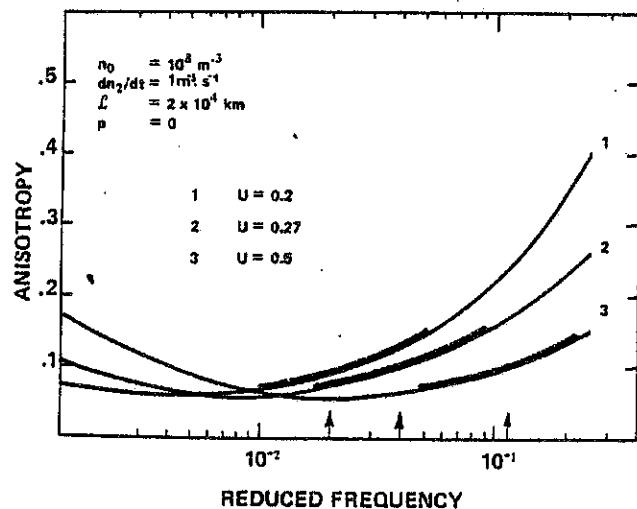


Fig. 7. Variation of the anisotropy with frequency for three values of U . The arrows indicate in each case the frequency for which B_r^2 is maximum. The thickening on each curve corresponds to the half-power bandwidth of the spectrum.

distribution as a function of the source intensity, and the simultaneous increases of the trapped and precipitated fluxes.

1. Wave Spectrum of the ELF Hiss

Occurrence. From the measurements of Burton et al. [1970] it appears that ELF hiss occurs inside the plasmasphere and the ELF chorus occurs outside in far regions where $V_s \lesssim 3000$ km/sec. Our (15) shows that at a given L value the maximum power spectral density is directly proportional to the cold plasma density;

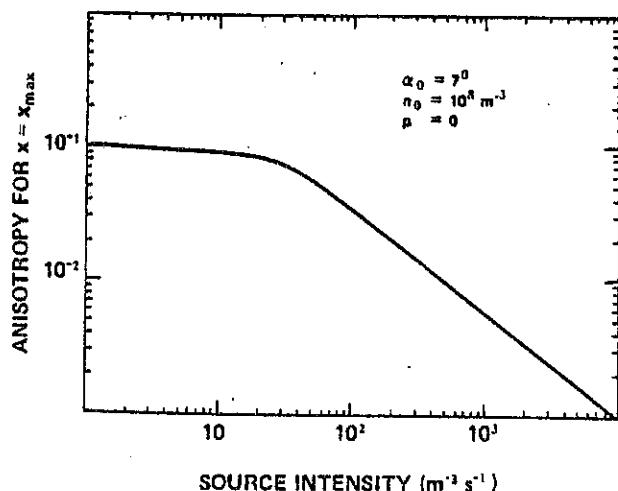


Fig. 8. The anisotropy (for $x = x_{\max}$) as a function of the source intensity. In the limit of validity of (20) this anisotropy does not depend on the specific value of U .

8160

ETCHETO ET AL.: SELF-CONSISTENT THEORY OF ELF HISS

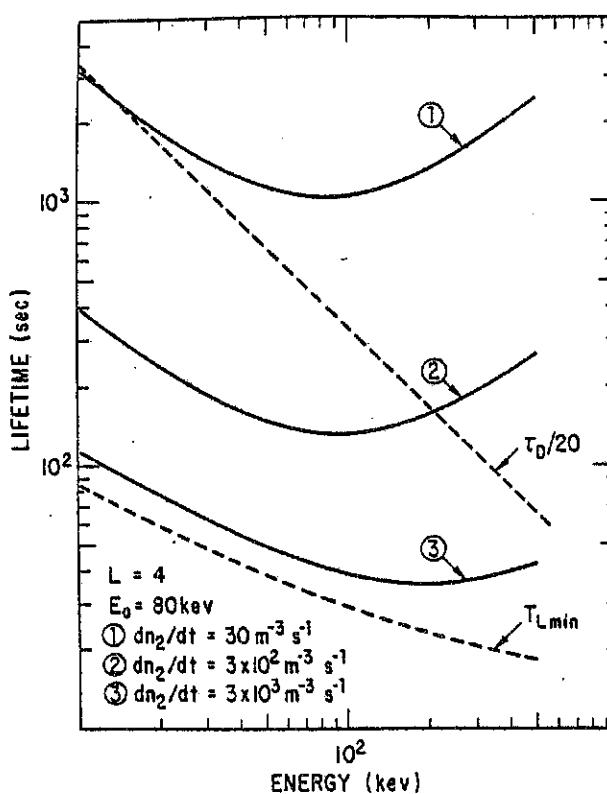


Fig. 9. Particle lifetime as a function of energy; τ_D is the drift period and $\tau_D/20$ is the time the particles need to drift over 12° in longitude. No relativistic effects have been included in these computations; such effects will change the numerical values, by a factor of ~ 2 , but they will not change the general trend.

thus a larger occurrence inside rather than outside the plasmasphere is indicated. But, when L increases, the increase of B_r due to the factor $L^{1/2}$ can overcome the decrease that is produced by the abrupt diminution of n_o at the plasma-pause boundary. Especially in the regions of the detached plasma observed by Chappell [1972] in the afternoon sector, our theory predicts that ELF hiss should be emitted. If we estimate that in these regions $n_o = 20 \text{ cm}^{-3}$, $L = 7$, and $dn_2/dt = 10 \text{ m}^{-3} \text{ sec}^{-1}$, we find, by using (15), $B_{r,\max}^2 = 6.4 \text{ my}^2 \text{ Hz}^{-1}$ and $x = 3.5 \times 10^{-3}$. These emissions should be observable by satellite-borne search coil magnetometers at the time when detached plasma bubbles are encountered.

Peak frequency. Thorne et al. [1973] have studied the variation of the ELF peak frequency as a function of L . They did not find any clear relation between this frequency and the characteristic frequencies of the medium. This could be explained by the fact that the peak

frequency is related not only to V_a but also to V_o , which was not measured in their experiment.

Using the cold plasma density measurements of Burton et al. [1970] for day conditions and those of Chappell [1972] for night conditions and taking the values given by Hess [1968] for the electron characteristic energy, we can compute the peak frequency. We find that x_{\max} is of the order of 6×10^{-3} at $L = 3$, 1.4×10^{-2} at $L = 4.2$ during the day, and 2×10^{-3} at $L = 5$ during the night. These values agree well with the experimental data that were reported by Thorne et al. [1973]. The region in which the validity of the theory could be more easily checked is the dusk sector in which n_o remains large at large L values. Unfortunately, the measurements of Thorne et al. do not separate this region from the other ones.

Intensity. Thorne et al. [1973] reported ELF intensities ranging from 10^{-1} to $10^3 \text{ my}^2 \text{ Hz}^{-1}$. To emit such a wave field, we need at $L = 5$, for instance, with $n_o = 10^7 \text{ m}^{-3}$ a source intensity ranging from 2 to $2 \times 10^3 \text{ m}^{-3} \text{ sec}^{-1}$ (equation 15). The characteristic energy at $L = 5$ is 40 kev if one assumes a variation $E_o = 5 \times 10^{-3} L^{-2} \text{ kev}$. Equation 29 therefore shows that such a source intensity must correspond to a precipitated flux of particles with energy greater than 40 kev, ranging from 2.5×10^7 to $2.5 \times 10^9 \text{ m}^{-2} \text{ sec}^{-1}$. These values are well in the range that was reported for this energy at this L value by O'Brien [1964].

One therefore sees that we are able to explain both the peak frequency and the intensity of the ELF hiss and to relate their variation with the cold plasma parameters as well as with the high-energy electron fluxes. Unfortunately, a one to one correspondence is impossible to establish yet because of the lack of sufficiently detailed experimental data. But, on the other hand, the possibility that exists for the waves to propagate across the magnetic field lines and to be detected at large distances from the point where they have been generated diminishes the interest of such a detailed study.

2. Role of the Source Intensity

From a rocket experiment during which low-frequency waves and high-energy particles were simultaneously measured [Gendrin et al., 1970],

a preliminary attempt to experimentally verify the quasi-linear diffusion theory was made [Etcheto et al., 1971a, b]. In particular, it was demonstrated that the diffusion coefficient that one got from the measurement of the angular distribution in the vicinity of the loss cone was identical to the one we deduced from the independent measurement of the VLF field intensity. Here we report new results that demonstrate that the wave spectral density that was observed is directly related to the source intensity.

During this experiment we measured the precipitated flux of electrons with energy greater than 20 kev. Its value for the three flights is given in Table 1. Using (29), one gets the theoretical value of the source intensity. This intensity is well below the limiting value b , which is defined by (25). Thus we can say that we were in the weak diffusion limit, a conclusion that the measurement of field intensity confirms [Etcheto et al., 1971a].

From the simultaneous measurement of the peak frequency of the hiss and of the characteristic energy of the particles we are able to deduce the cold plasma density in the interaction region $x_{\max} \sim U^2/2$. Applying (15), one therefore gets an estimation of the wave intensity B_{exp}^2 . But the wave intensity was also measured on board the rocket, and from this measurement one gets another estimation of the field intensity in the interaction region B_{exp}^2 [Etcheto et al., 1971a, b].

The agreement between the two values is not bad if one takes into account the crudeness of the assumptions for deducing the equatorial value of B^2 .

The measurement of the differential flux at the border of the equatorial loss cone is also possible on board a low-altitude rocket (Table 1). As we are in the weak diffusion limit, we can use (18b) and (19b) for computing the theoretical value of this same flux. There is a discrepancy between theory and experiment. We attribute it to the arbitrary choice of the energy dependence of the source and to the crudeness of the measurements.

Table 1 shows, in a one to one correspondence, that the main characteristic of the wave field (peak frequency, amplitude) or of the particle distribution (differential flux, integral precipitated flux) are just a consequence of the source

TABLE 1. Experimental Verification of the Theory

Flight	E_0 kev	x	$J_p(>E_0)$ (cm ² sec) ⁻¹	B_f^2 m ² Hz ⁻¹	$J(E_0, \alpha_0)$ (cm ² ster sec kev) ⁻¹	n_0 m ⁻³	dn_0/dt (m ³ sec) ⁻¹	Theory	
								Experiment	Theory
1	3.8×10^{-2}	120	1.45×10^6	5.6	6.6×10^3		1.4×10^8	150	16
2	2.7×10^{-2}	55	2.06×10^6	3.0	6.5×10^3		3.6×10^8	21	2.7
3	12×10^{-2}	70	2.5×10^6	0.5	3.8×10^4		2.2×10^8	260	1.1
									3×10^4
									2.4×10^4
									6.8×10^4

Measurements were made during three rocket flights made at Kerguelen Islands.

parameters (characteristic energy E_* and intensity dn_*/dt), as the theory predicts.

3. Simultaneous Variation of the Trapped and Precipitated Fluxes

As was shown in sections B.5 and C.2, the trapped flux is an increasing function of the source intensity; the same is true for the precipitated flux. This simultaneous variation of the two fluxes has often been reported in the literature [e.g., Parks and Winckler, 1968]. But the cases for which a one to one correspondence has been established are very few. Therefore we will do a comparison on a statistical basis, taking independent measurements of both fluxes in similar conditions of magnetic activity, as defined by the K_p index.

The intensity of the source is deduced from O'Brien's [1964] measurements by using an equation identical to (29) but in which we have restricted the energy range from $E_*/2$ to $2E_*$. The lower limit comes from the fact that at $L = 4$, $E_* \sim 80$ kev and that O'Brien gives measurements above 40 kev. The higher limit is a consequence of the fact that an equilibrium situation cannot be established in a sufficiently short time for very high energy particles (section B.6).

The variation of the trapped flux as a function of K_p is taken from Hess [1968]. We again restrict ourselves to energies between 40 and 160 kev. These data were given in count rates, and we have normalized them to the theoretical values at low source intensity.

Figure 10 gives the results of such a comparison. One sees that the trapped flux does not vary significantly for values of K_p smaller than 2-3, even if the precipitated flux increases by a factor of 100 (corresponding to an increase of the source intensity from 1 to 100 $\text{m}^{-3} \text{ sec}^{-1}$). The limiting value of the source intensity is exactly the one given by (25). Above this limiting value, the trapped flux increases, and it can reach values as high as 20 times the quiet condition value. One therefore sees that it is not realistic to consider the limiting flux as if it had a unique value.

The theoretical curve fits well with the experimental one, although the experimental curve has been established on the basis of statistically independent data. An interesting consequence of this study is that we can assign a value of

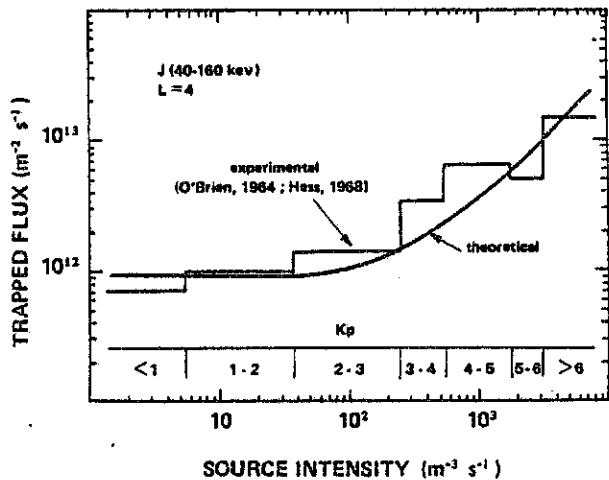


Fig. 10. Variation of the limiting flux with the source intensity, which is deduced from the measurements of the precipitated flux for different values of K_p [O'Brien, 1964] by using an equation similar to (29). The trapped flux as a function of K_p was taken from Hess [1968].

the source intensity to each value of K_p . At $L = 4$, the source intensity as a function of K_p is.

K_p	$dn_*/dt, \text{m}^{-3} \text{ sec}^{-1}$
2-3	$\sim 10^2$
4-5	$\sim 10^3$
>6	$\sim 10^4$

This quantity, which is a source term in the gyroresonant theory that we worked with, plays in fact the role of a loss term in any radial diffusion or inward motion theory. We thus have an estimation of the loss term that should be introduced in such theories as a function of K_p for this value of L .

E. Discussion

In this paper we solved completely the self-consistent problem of the equilibrium situation that prevails between waves and particles during a gyroresonant interaction process. Although the assumptions that were made correspond to a very idealized case, the agreement between the theory and the observations is good. During this study we also were led to clarify some important concepts.

The most stringent hypothesis we have made is that the gyroresonant interaction is the main one and governs the equilibrium process. It is known that this is not the case for electrons having very high energy ($\gtrsim 200$ kev) or very

high pitch angles ($>85^\circ$) for which one must consider Landau effects or phenomena involving the harmonics of the gyrofrequency [Lyons et al., 1971, 1972]. Taking such effects into account would suppress the difficulty that we have with loosing particles having high energies or large pitch angles (section B.6). This is the reason why the agreement between the theory and the experimental facts is good only if we restrict ourselves to energies between $E_0/2$ and $2E_0$ (section D.3). But our theory is approximately valid in this energy range, which corresponds to the most important part of the hot particle population, at least for L values greater than ~ 3 . The second assumption that we made was to consider only waves that propagate along the magnetic field line; this is a very restrictive assumption. But detailed computations by Brinca [1972] show that for reasonable anisotropies ($0 < A < 1$) and for low frequencies ($x < 0.5$, i.e., for not too small energies, $E > 300$ ev) the growth rate for gyroresonant interaction is maximized when $k_\perp = 0$. Therefore taking other wave normal angles into consideration will not modify our conclusions too much. On the other hand, it is clear that any comparison with experimental data will suffer from such an effect: waves may propagate over long distances across the field lines before they are observed. This prevents us from making any firm statement about the experimental verification of the theory, at least as far as the waves are concerned.

Our third important assumption is related to the more or less undefined concept of a 'length of interaction.' One can argue that such a concept is justified by the fact that the growth rate, at a given frequency, is important only over a finite length that is of the order of the one we have chosen [Liemohn, 1967]. A self-consistent justification of such a length has also been given by Helliwell [1967]. Strictly speaking, we could have gotten a fully self-consistent solution if we had included the z variation of the different quantities instead of averaging them (appendix), but this would have led us to too intricate formulas. In any case, this length of interaction just intervenes as a linear factor in all our formulas, and therefore it can be changed easily, according to more realistic estimations.

The results that we have obtained under these assumptions may be summarized as follows:

1. The peak frequency of the wave spectrum is a function of the characteristic energy of the incoming particles. It is approximately equal to half the resonant frequency of particles that have a parallel velocity equal to the characteristic velocity of the source particles. Inside the plasmasphere the peak frequency is small (equation 14).

2. The peak intensity of the wave field is directly proportional to the source intensity and therefore to the precipitated flux (equation 29). It is also proportional to the cold plasma density (equation 15) and consequently is larger inside the plasmasphere.

3. The limiting flux concept, which was introduced by Kennel and Petschek [1966], is a zero-order approximation. When the source intensity increases, the equilibrium trapped flux increases by a factor that can be as large as 20 (Figures 1 and 10). For a given source intensity the true limiting flux is a decreasing function of energy, but it decreases at a smaller rate than the source itself (equation 26). The idea that fluxes may exceed the zero-order limiting flux when the source intensity is large was already contained in the original work of Kennel and Petschek. We have merely given a quantitative and self-consistent estimation of such an effect.

4. The strength of the diffusion must be defined in terms of the source intensity and not in terms of the wave field intensity, which is frequency dependent. There exists a limiting value of the source intensity (equations 24 and 25) above which the diffusion is so strong that the zero-order approximation of the limiting flux is no longer valid. At the same time, the mean anisotropy of the distribution function decreases markedly (Figure 8).

5. The equilibrium directional or omnidirectional fluxes do not depend on the cold plasma characteristics and therefore do not change as one crosses the plasmapause.

As was discussed in sections B.2 and B.4, this last conclusion has important consequences from the point of view of the dynamics of hot particles in the magnetosphere. It seems to contradict the widespread idea that increasing the cold plasma density will decrease the limiting flux of hot particles and therefore will induce strong precipitation. As such, it needs some discussion.

8164

ETCHETO ET AL.: SELF-CONSISTENT THEORY OF ELF HISS

The arguments from which one concludes the efficiency of an increase in n_o [e.g., Brice, 1970, 1971; Brice and Lucas, 1971] are based upon the existence of a critical parallel energy E_c , which scales as the magnetic energy per particle $E_m = B_0^2/2\mu_0(n_o + n_i)$, and therefore decreases when n_o is increased, but also depends on the anisotropy, the exact formula being for (e, R) interactions

$$E_c = E_m/A(1 + A)^2 \quad (32)$$

If A is assumed to remain constant, regardless of the frequency (or the parallel energy) for which it is computed, it is true that increasing n_o will decrease E_c and put more particles into the interaction business.

But in an equilibrium and self-consistent configuration there is no critical frequency and hence no critical energy for the following reason. If we neglect for the moment the possible variation of R with frequency, γV_s has to remain constant throughout the whole frequency range because of (6). The anisotropy has to adjust itself in such a manner that γV_s remains constant, even when $x \rightarrow 1$, in which case $A \rightarrow \infty$. The results of our numerical computations clearly show this effect (Figure 7), which is a consequence of a self-consistent treatment in which A is not imposed a priori.

Another way of understanding what phenomena occur when the cold plasma density is changed is the following. When n_o is increased, (15) shows that the frequency for which the field is maximum has decreased ($x \propto n_o^{-1}$). But the resonant velocity, which is approximately given by $V_r = V_s x^{-1/2}$ remains the same because V_s varies like $n_o^{-1/2}$. Consequently, the particles that resonate with the most intense waves are the same, inside and outside the plasmasphere. We therefore understand why the low-energy particles are not much affected by a change of n_o .

Of course, this conclusion is valid only in a time-independent situation in which all transient effects are neglected. In a time-dependent problem the time constant that is needed to reach a new equilibrium configuration depends on the wave growth rate and on the particle diffusion coefficient, which both are varying quantities. It is therefore very difficult to compute it, but we can choose, as a reasonable estimation, the particle lifetimes (Figure 9).

For electrons that we considered here, this lifetime is very short, especially during strong injection events, so that it is doubtful that a sudden increase of the cold plasma density would lead to any durable effect on the existing trapped particles. This conclusion is not valid for protons because it is well known that the lifetime for ion-cyclotron interaction is much larger.

But it could seem contradictory that the plasmasphere plays no role in the TPDF and has one in the wave spectrum intensity. This point also needs some clarification.

In our treatment we have neglected any particle energy loss, and nevertheless we have gotten a sort of energy creation in the wave field; in this respect, our treatment is not fully self-consistent. The wave field energy comes from the growth rate coefficient. This coefficient should be associated with a particle energy loss, and, strictly speaking, it is, because there is always an associated diffusion in energy. We have neglected it because it is small in the frequency range of interest, but we must verify that the wave energy flux thus introduced remains small with respect to any energetic flux coming from the particles.

The mean wave energy output of the system is $(\int B_r^2 df)/2\mu_0\tau$ and is of the order of 10^{-10} joule $m^{-3} sec^{-1}$ for a mean wave field intensity of 40 my and a mean escape time τ of the order of 10 sec. The mean particle energy input is $\approx E_o (dn_o/dt)$ and is of the order of 10^{-12} joule $m^{-3} sec^{-1}$ for $E_o \approx 80$ kev and $dn_o/dt \approx 10^9 m^{-3} sec^{-1}$, which is not a large value. Consequently, the energy that appears in the waves per time unit is completely negligible with respect to the energy that is introduced by the source per time unit. This explains why we are allowed to neglect the particle energy diffusion in a first-order approximation and also why the plasmasphere can play a role in the wave field intensity (through very small changes of the pitch angle distribution functions) and not in the total particle flux.

Note added in proof. In a recent work, Kivelson and Russell [1973] have studied the influence of detached regions of enhanced cold plasma density on the spectrum of ELF hiss and on the distribution function of medium-energy electrons. As our theory predicts, they have observed an increase in the intensity and

a decrease in the mean frequency of the ELF hiss but no measurable effect on the particle population, either in terms of flux intensity or in terms of pitch angle distribution.

F. APPENDIX

The interaction region is supposed to be symmetrical with respect to the equator. The particles being much faster than the waves ($v_{\parallel} \gg |V_s|$), they have time to interact twice per bounce period before the wave energy leaves the interaction region. Consequently, the distribution function $f_1(\alpha, v, z)$ is an even function of z , and its derivative with respect to z is an odd function. The diffusion equation can be written as

$$\frac{df}{dt} = \frac{\pi e^2}{m^2 \sin \alpha} \frac{1}{\partial \alpha} \left[\sin \alpha \frac{B_k^2(z)}{|v_{\parallel} - V_s|} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right] + s(\alpha, v, z) - p(\alpha, v, z)$$

where s and p are local source and loss terms. Neglecting second-order terms and assuming a stationary state ($\partial/\partial t = 0$), one obtains

$$v_{\parallel} \frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\pi e^2}{m^2 \sin \alpha} \frac{1}{\partial \alpha} \left[\sin \alpha \frac{B_k^2(z)}{|v_{\parallel} - V_s|} \frac{\partial f_0}{\partial \alpha} \right] + s(\alpha, v, z) - p(\alpha, v, z)$$

When we integrate over z , the left-hand side vanishes because of the above parity considerations, and we get (2), in which the z dependence has disappeared at the expense of the introduction of an interaction length.

Following a method more or less similar to the one used by Cocke and Cornwall [1967] or by Liemohn [1967], we could have kept the z dependence of all quantities, including the growth rate coefficient given by (4). This would have led us to a self-consistent definition of the interaction length, but the formulas would have become much more complicated.

Acknowledgments. We are grateful to G. Laval and R. Pellat (École Polytechnique, Paris) for valuable discussions and stimulating remarks.

This work was completed at a time when one of us (R.G.) had the benefit of an ESRO/NASA fellowship.

* * *

The Editor thanks A. L. Brinca and C. F. Kennel for their assistance in evaluating this paper.

REFERENCES

- Brice, N., Artificial enhancement of energetic particle precipitation through cold plasma injection: A technique for seeding substorms?, *J. Geophys. Res.*, 75, 4890-4892, 1970.
- Brice, N., Harnessing the energy in the radiation belts, *J. Geophys. Res.*, 76, 4698-4701, 1971.
- Brice, N., and C. Lucas, Influence of magnetospheric convection and polar wind on loss of electrons from the outer radiation belt, *J. Geophys. Res.*, 76, 900-908, 1971.
- Brinca, A. L., On the stability of obliquely propagating whistlers, *J. Geophys. Res.*, 77, 3495-3507, 1972.
- Burton, R. K., C. T. Russell, and C. R. Chappell, The Alfvén velocity in the magnetosphere and its relationship to ELF emissions, *J. Geophys. Res.*, 75, 5582-5586, 1970.
- Chappell, C. R., Thermal ions in the magnetosphere, in *Earth's Magnetospheric Processes*, edited by B. M. McCormac, pp. 280-292, D. Reidel, Dordrecht, Netherlands, 1972.
- Cocke, W. J., and J. M. Cornwall, Theoretical simulation of micropulsations, *J. Geophys. Res.*, 72, 2843-2856, 1967.
- Eather, R. H., and R. L. Carovillano, The ring current as the source region for proton auroras, *Cosmic Electrodynamics*, 2, 105-132, 1971.
- Etcheto, J., Wave-particle interactions inside the magnetosphere: Interpretation of simultaneous rocket measurements of VLF waves and electron fluxes (in French), Ph.D. thesis, University of Paris VI, Paris, 1972.
- Etcheto, J., R. Gendrin, and D. Lemaire, Diffusion of particles in the presence of simultaneous VLF and ULF electromagnetic waves, *J. Geophys. Res.*, 76, 1079-1082, 1971a.
- Etcheto, J., R. Gendrin, and D. Lemaire, Experimental study of electron pitch angle diffusion in the presence of VLF modulated hiss, Wave-Particle Interactions in the Magnetosphere, *Spec. Publ.* 72, 123-134, Eur. Space Res. Organ., Frascati, Italy, 1971b.
- Gendrin, R., Pitch angle diffusion of low energy protons due to gyroresonant interactions with hydromagnetic waves, *J. Atmos. Terr. Phys.*, 30, 1313-1330, 1968.
- Gendrin, R., Gyroresonant wave-particle interactions, in *Solar-Terrestrial Physics/1970*, edited by E. R. Dyer, pp. 236-269, D. Reidel, Dordrecht, Netherlands, 1972.
- Gendrin, R., J. Etcheto, and B. de la Porte des Vaux, Very low frequency and particle rocket experiment at Kerguelen Islands, 2, Particle measurements, *J. Geophys. Res.*, 75, 6169-6181, 1970.
- Gregory, C. I., Pitch angle distribution of protons and helium ions in the magnetosphere, *J. Geophys. Res.*, 76, 268-271, 1971.
- Haerendel, G., On the balance between radial and pitch angle diffusion, in *Particles and Fields in the Magnetosphere*, edited by B. M. Mc-

8166

ETCHETO ET AL.: SELF-CONSISTENT THEORY OF ELF HISS

- Cormac, pp. 416-428, D. Reidel, Dordrecht, Netherlands, 1970.
- Helliwell, R. A., A theory of discrete emissions from the magnetosphere, *J. Geophys. Res.*, **72**, 4773-4790, 1967.
- Hess, W. N., *The Radiation Belt and Magnetosphere*, p. 262, Blaisdell, Waltham, Mass., 1968.
- Kennel, C. F., and H. E. Petschek, Limit on stably trapped particle fluxes, *J. Geophys. Res.*, **71**, 1-28, 1966.
- Kivelson, M. G., and C. T. Russell, Active experiments, magnetospheric modification and a naturally-occurring analogue, submitted to *Radio Sci.*, 1973.
- Liemohn, H. B., Cyclotron resonance amplification of VLF and ULF whistlers, *J. Geophys. Res.*, **72**, 39-55, 1967.
- Lyons, L. R., R. M. Thorne, and C. F. Kennel, Electron pitch-angle diffusion driven by oblique whistler-mode turbulence, *J. Plasma Phys.*, **6**, 589-606, 1971.
- Lyons, L. R., R. M. Thorne, and C. F. Kennel, Pitch-angle diffusion of radiation belt electrons within the plasmasphere, *J. Geophys. Res.*, **77**, 3455-3474, 1972.
- O'Brien, B. J., High-latitude geophysical studies with satellite Injun 3, 3, Precipitation of electrons into the atmosphere, *J. Geophys. Res.*, **69**, 13-43, 1964.
- Parks, G. K., and J. R. Winckler, Acceleration of energetic electrons observed at the synchronous altitude during magnetospheric substorms, *J. Geophys. Res.*, **73**, 5786-5791, 1968.
- Paulikas, G. A., Inadvertent experiments involving wave-particle interactions on a geophysical scale: An unsuccessful search, *Rep. TR-0172 (2260-20-15)*, Aerosp. Corp., Los Angeles, Calif., March 1972.
- Roux, A., and J. Solomon, Self-consistent solution of the quasi-linear theory: Application to the spectral shape and intensity of VLF waves in the magnetosphere, *J. Atmos. Terr. Phys.*, **33**, 1457-1471, 1971.
- Russell, C. T., R. L. McPherron, and P. J. Coleman, Jr., Fluctuating magnetic fields in the magnetosphere, I, ELF and VLF fluctuations, *Space Sci. Rev.*, **12**, 810-856, 1972.
- Thorne, R. M., E. J. Smith, R. K. Burton, and R. E. Holzer, Plasmaspheric hiss, *J. Geophys. Res.*, **78**, 1581-1596, 1973.

(Received June 12, 1973;
accepted August 24, 1973.)

DRIFT OF PARTICLES AND WAVE-PARTICLE INTERACTIONS

JACQUES SOLOMON

Groupe de Recherches Ionosphériques, Centre National d'Etudes des Télécommunications, 3 Avenue de la République, 92131 - Issy-les-Moulineaux, France

1. Introduction

To improve our comprehension of the Earth's magnetosphere it is necessary to couple the dynamic of the particles and the plasma instabilities (see for example Ashour-Abdalla and Cowley, 1974). We will study here the effect on the ion-cyclotron interaction of the sudden appearance of hot protons on the nightside of the outer zone magnetosphere during substorms (Figure 1).

First, we will consider the dispersion relation of the electromagnetic ion-cyclotron waves (propagating parallel to the static magnetic field) in a finite β plasma and the respective effects of the cold and hot particle densities. Second, we will examine the effects of the gradient-curvature magnetic drift on the distribution function and on the ion-cyclotron interaction. Last, we will mention, as a conclusion, the radial drift due to the electric field.

2. Ion-Cyclotron Instability

The ion-cyclotron instability in a finite β plasma has been studied in numerous recent works (Cornwall and Schulz, 1971; Perraut and Roux, 1974), but essentially with the numerical computations (also notice the recent work of Cuperman and Landau on the electron-cyclotron instability). In this paragraph we try to give a brief analytical answer to the effects of a finite β plasma and of the cold plasma on the ion-cyclotron instability.

We write the total distribution function as the sum of a cold and hot plasma distribution function (e : electrons, i : protons):

$$F(v_{\perp}, v_{\parallel}) = n_0 \left[\frac{2\pi}{v_{\perp}} \delta(v_{\perp}) \delta(v_{\parallel}) + f_{i,e}(v_{\perp}, v_{\parallel}) \right] \quad (1)$$

and we choose for the hot protons a loss cone distribution function

$$f_i(v_{\perp}, v_{\parallel}) = \frac{n_1/n_0}{\pi^{3/2} v_0^3} \frac{1}{\Gamma(m+1)} \left(\frac{v_{\perp}}{v_0} \right)^{2m} \exp - \left(\frac{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2}{v_0^2} \right), \quad (2)$$

where n_0 is the cold plasma density and n_1 is the hot plasma density.

The anisotropy (as defined in Kennel and Petschek's work, 1966, for example) is in this case

$$\mathcal{A} = m.$$

The particle velocities v_{\perp} , v_{\parallel} , v , and the pitch angle α are defined as usual with re-

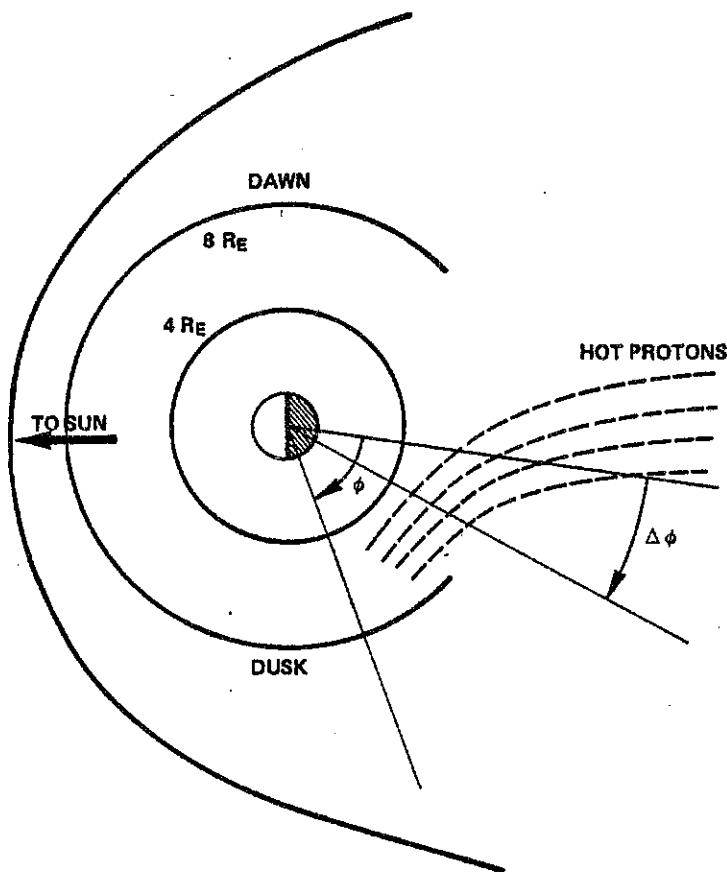


Fig. 1. Schematic view of the trajectories, in the equatorial plane, of the hot protons which contribute to the ring current. Definition of ϕ and $\Delta\phi$ as used in Section 3.

ference to the static magnetic field \mathbf{B}_0 . The hot electrons, whose distribution function is not specified, do not take an important part in the ion-cyclotron interaction as the relativistic electrons only can interact, however they ensure the electric neutrality.

Then we can write the dispersion relation with the Fried and Conte function in the following form:

$$D(\omega, k) = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} - \frac{\omega_p^2}{\omega_{ci}(\omega_{ci} - \omega)} \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{n_1}{n_0 + n_1} \frac{\omega_{ci}(\omega_{ci} - \omega)}{\omega^2} \left[1 + \frac{V_R}{U_{||}} Z \left(\frac{V_R}{U_{||}} \right) \right] \left(m - \frac{\omega}{\omega_{ci} - \omega} \right) \right\} \quad (3)$$

in which,

ω_p : ion plasma frequency calculated with the total density $n_0 + n_1$

c : light velocity

k : wave number ($\mathbf{k} // \mathbf{B}_0$)

ω_{ci} : ion-cyclotron frequency

$f = \omega/2\pi$: wave frequency

$V_R = (\omega - \omega_{ci})/k$: resonant velocity

$U_{||}^2 = v_0^2$.

The Fried and Conte function (Fried and Conte, 1961) is defined as:

$$Z(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp - v^2}{v - z} dv.$$

From this dispersion relation, we can deduce the imaginary part of the wave frequency ω_i ($\omega = \omega_r + i\omega_i$). We obtain schematically the curve vs x represented on Figure 2, where $x = \omega/\omega_{ci}$ is the reduced frequency. We get an amplification of the waves when ω_i is positive.

Now, due to the term

$$\left(m - \frac{\omega}{\omega_{ci} - \omega} \right)$$

which appear both in (3) and in the formula for ω_i (see below, formula (5)), there is a cut-off frequency x_c . For not too large anisotropies, i.e. $m \lesssim 1$, the cut-off frequency $x_c \lesssim 0.5$. Then it is possible to show that $V_R/U_{||} \gtrsim 1$ in the amplification region ($0 \leq x \leq x_c$).

This is sufficient to simplify $D(\omega, k)$ by using the well-known asymptotic development of the Fried and Conte function:

$$\operatorname{Re} Z(V_R/U_{||}) \approx -(U_{||}/V_R).$$

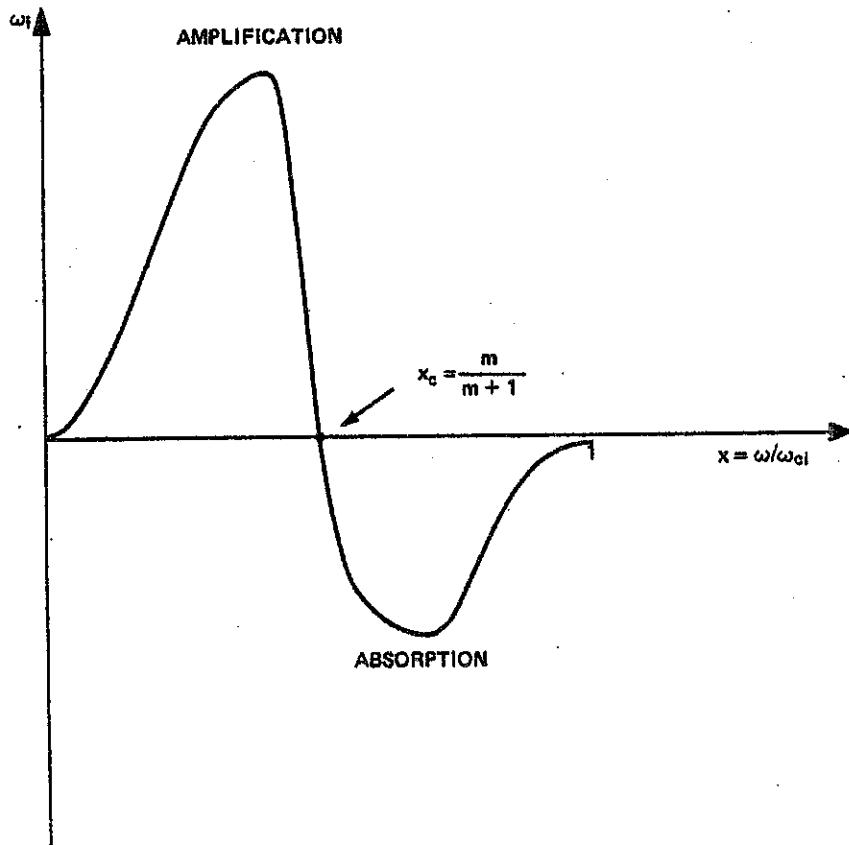


Fig. 2. Schematic plot of the growth rate of the ion-cyclotron wave vs the reduced frequency x .

Thus we will obtain all the usual expressions in the same form as when n_1/n_0 is much less than one, provided that we use the total density ($n_0 + n_1$) instead of n_0 in all the quantities where it appears.

For instance we will get the classical expression for the resonant velocity (Kennel and Petschek, 1966):

$$V_R^2 \simeq V_A^2 \frac{(1-x)^3}{x^2}, \quad (4)$$

where V_A is the ion Alfvén velocity computed with $n_0 + n_1$.

One important thing is to note: this can also be demonstrated for any distribution function, and thus it will be useful when the distribution function will be deformed by the gradient-curvature magnetic field.

The other point to be discussed is the importance of the cold plasma. We can write the growth rate of the ion-cyclotron interactions for the same loss cone distribution function, in the following form:

$$\begin{aligned} \omega_i(x)/\omega_{ci} \simeq & \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{n_1}{n_0 + n_1} \frac{V_R^2}{v_0^2} \frac{v_0}{V_A} \times \\ & \times \left[\exp - \left(\frac{V_R^2}{v_0^2} \right) \right] \left(m - \frac{x}{1-x} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

and the maximum of this growth rate is obtained for a frequency x_0 satisfying the following equation:

$$\frac{V_R^2}{v_0^2} \simeq 1 + \frac{x_0}{2(1-x_0)} \frac{1}{m - \frac{x_0}{1-x_0}}. \quad (6)$$

But this maximum depends on V_A , through the resonant velocity V_R , thus on the cold plasma density n_0 and the 'largest' maximum growth rate will be obtained for an optimum value of n_0 given approximately by

$$\left(\frac{n_0 + n_1}{n_1} \right)_{opt} \approx \left(\frac{2}{m} \right)^2 \frac{1}{\beta_{||}}, \quad (7)$$

where $\beta_{||}$ is the ratio of the parallel kinetic pressure to the magnetic pressure. The corresponding frequency x_{max} depends practically only on the anisotropy:

$$x_{max} \simeq \frac{m}{m+2}. \quad (8)$$

Formula (7), with n_0 , emphasizes the importance of the bulge of the plasmapause. As the hot protons drift both in azimuth and in L -value, they may encounter this bulge and the increase of the cold plasma density allows the ion-cyclotron interaction to occur.

In the preceding discussion we have considered a given distribution function for

the hot protons, but in fact these protons are drifting and we must include this drift in our computations.

3. Effects of the Gradient-Curvature Magnetic Drift of the Hot Protons on the Distribution Function

We assume that, at time $t=0$, the distribution function of the hot protons on a given L -shell is of the following form:

$$f(v_{\perp}, v_{\parallel}) \exp -\frac{\phi^2}{(\Delta\phi)^2}, \quad (9)$$

where ϕ is the azimuth angle for the drifting protons from a given initial position and $\Delta\phi$ a given initial width of injection (Figure 1).

We assume a dipole magnetic field. The bounce average drift velocity V_D is then (Hamlin *et al.*, 1961):

$$V_D = Ar_0v^2(0.7 + 0.3 \sin\alpha) \quad \text{with} \quad r_0 = L R_E \quad \text{and} \quad A = \frac{3 m_i}{2 q} \frac{1}{B_0 r_0^2} \quad (10)$$

L : McIlwain parameter

R_E : Earth radius

m_i : proton mass

q : electric proton charge

B_0 : equatorial magnetic field at $r=r_0$.

Then at any positive time t and azimuthal angle ϕ , we obtain the new distribution function in the equatorial plane:

$$\begin{aligned} f(v_{\perp}, v_{\parallel}, \phi, t) &= f(v_{\perp}, v_{\parallel}) \\ &\times \exp -\frac{1}{(\Delta\phi)^2} [\phi - Av^2 t (0.7 + 0.3 \sin\alpha)]^2. \end{aligned} \quad (11)$$

From this expression we can compute useful quantities such as the density, the thermal energy, the anisotropy.

For instance, for the density, we obtain (with $m=1$)

$$n_1(\phi, t) \approx 1.3 n_1(t=0) \frac{\Delta\phi}{\phi} \left(\frac{\phi}{0.85 A v_0^2 t} \right)^{5/2} \exp -\frac{\phi}{0.85 A v_0^2 t}, \quad (12)$$

where $n_1(t=0)$ is the initial value of the hot protons density.

We have plotted these quantities vs time for a given ϕ and given initial values on Figure 3. We have chosen $\Delta\phi = 30^\circ$, a value which seems to be reasonable for the width of injection during substorms (Pfizer and Winckler, 1969). All these quantities, after a rapid increase, decrease more slowly. By using the remark on the simplification of the dispersion relation, in Section 2, we can also compute the growth rate $\omega_i(x, t, \phi)$. We will not give here its analytical expression which is complicated, but the consequences for the emission: we determine the frequency for which it is maximum

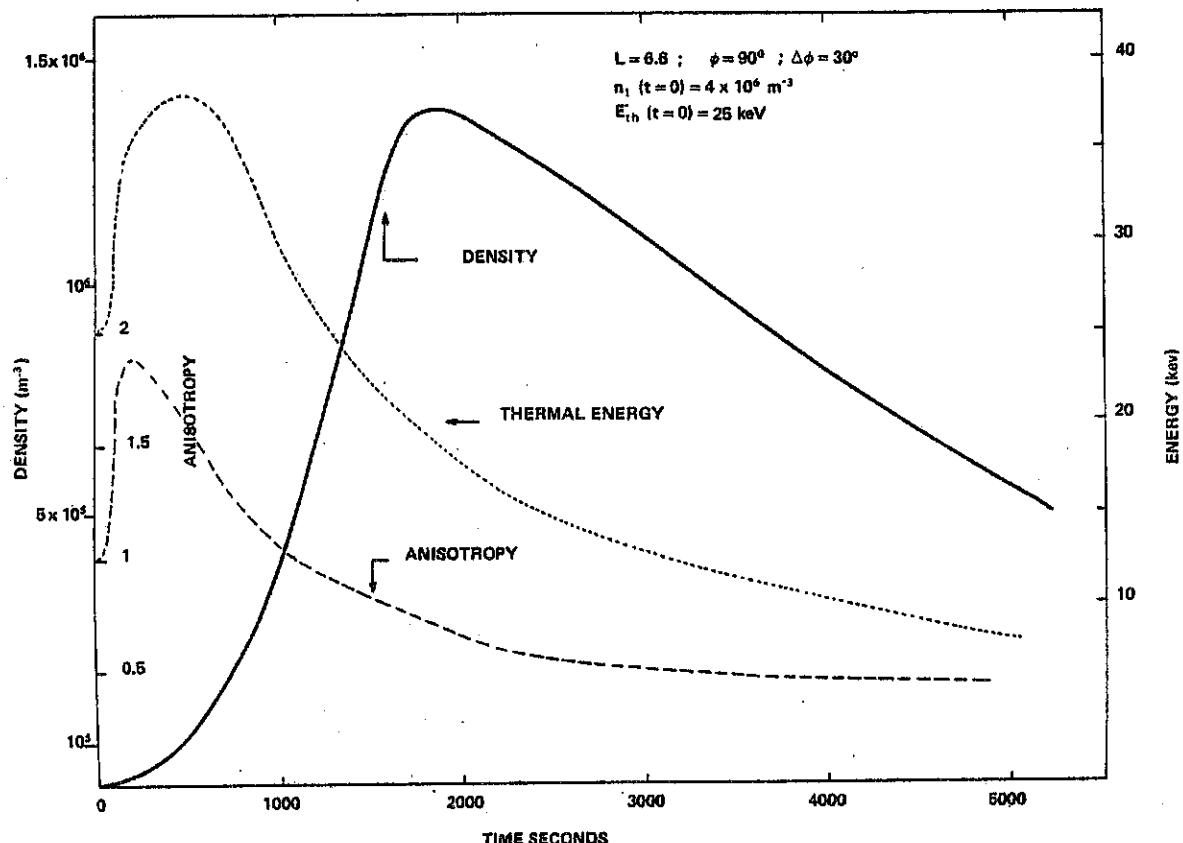


Fig. 3. Plot of the density, the anisotropy and the thermal velocity of the hot protons vs time, for a given ϕ . For the anisotropy, we have fixed $V_R^2 = 2v_0^2$.

at any time for a given ϕ and the corresponding values of this growth rate (Figure 4).

We can see on Figure 4 that the emitted frequency for a given ϕ does not change very much as time elapses: about 15% if we consider the frequency range in which the largest growth rate changes by an order of magnitude. There is also a weak dependence of the frequencies with the azimuth angle ϕ . These results seem in agreement with measurements of the electromagnetic noise in the ULF range obtained on the ATS-1 satellite (McPherron *et al.*, 1972). We also find that the largest growth rates for different values of ϕ are obtained for $t \approx 1100$ s ($\phi = 90^\circ$) and $t \approx 1500$ s ($\phi = 120^\circ$). These values correspond to the same emitted frequency given by the following expression:

$$x \approx \frac{2}{3(1 + v_0/V_A)}. \quad (13)$$

We will conclude this paper with some comments on this last formula.

4. Conclusion

From (13), as v_0 and V_A depend on L , the emitted frequencies will be different on each L -shell; and in fact, we should also take into account the radial drift of the

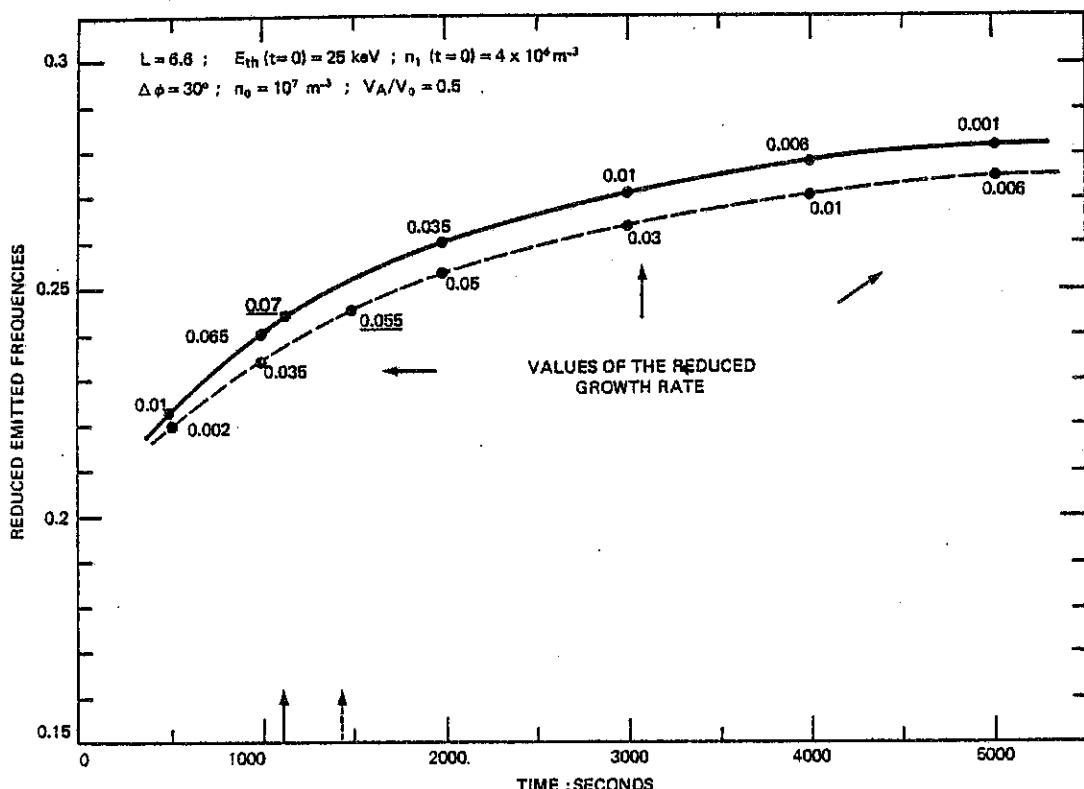


Fig. 4. Plot of the emitted frequencies for which the growth rate is maximum vs time, for $\phi = 90^\circ$ (solid line) and $\phi = 120^\circ$ (dashed line), and given initial parameters (on top of the curves). The corresponding values of the reduced growth rate ω_r/ω_{ci} are also indicated on the curves.

protons. We hope that we will improve, by this way, the theory of the ion-cyclotron interaction in the magnetosphere and its applications to emission such as IPDP or Pci, and further on the possible effects on the ring current.

Acknowledgement

We would like to thank Dr R. Pellat, from the Theoretical Center of 'Ecole Polytechnique', Paris, who has given us the basic idea of this work.

References

- Ashour-Abdalla, M. and Cowley, S. W. H.: 1974, in B. M. McCormac (ed.), *Magnetospheric Physics*, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht-Holland, p. 241.
Cornwall, J. M. and Schulz, M.: 1971, *J. Geophys. Res.* **76**, 7791.
Cuperman, S. and Landau, R. W.: 1974, *J. Geophys. Res.* **79**, 128.
Fried, B. D. and Conte, S. D.: 1961, *The Plasma Dispersion Function*, Academic Press, New-York.
Hamlin, D. A., Karplus, R., Vik, R. C., and Watson, K. M.: 1961, *J. Geophys. Res.* **66**, 1.
Kennell, C. F. and Petschek, H. E.: 1966, *J. Geophys. Res.* **71**, 1.
McPherron, R. L., Russell, C. T., and Coleman, P. J., Jr.: 1972, *Space Sci. Rev.* **13**, 411.
Perraut, S. and Roux, A.: 1974, 'Respective Role of the Cold and Warm Plasma Densities on the Generation Mechanism of ULF Waves in the Magnetosphere', to be published, *J. Atmospheric Terrest. Phys.*
Pfizer, K. A. and Winckler, J. R.: 1969, *J. Geophys. Res.* **74**, 5005.

Story No.: c8052100

VOL. 81, NO. 19

JOURNAL OF GEOPHYSICAL RESEARCH

JULY 1, 1976

On the Azimuthal Drift of Substorm-Injected Protons

J. SOLOMON

*Centre de Recherches en Physique de l'Environnement Terrestre et Planétaire
Centre National d'Etudes des Télécommunications, Issy-les-Moulineaux, France*

The longitude and time dependence of the pitch angle distribution function of protons injected during substorms on a given L shell is studied. The results are compared with the experimental data of Konradi et al. (1973). The theoretical importance of the anisotropy of the initial distribution function and of the longitudinal width of the injection region is stressed. It is suggested that measurements be made at low pitch angles ($\leq 20^\circ$).

INTRODUCTION

In a recent report on the energy spectra and pitch angle distributions of substorm-injected protons measured on board Explorer 45 (S³-A) [Konradi et al., 1973] a remarkable feature of the observed proton distribution function was noted: the pitch angle distribution function at a given point in space initially peaked at 90° and showed off 90° pitch angle peaks afterwards. The peaks moved further and further off 90° as time elapsed. This effect, which was clearly due to the gradient curvature magnetic drift of the energetic protons, was used to determine the time and the azimuthal angle of injection of these protons in a given range of energy and on a given L shell. However, Konradi et al. [1973] have used the trajectories of individual particles. The purpose of this report is to present the computation of the statistical process and to show that it gives a detailed description of the time-dependent distribution func-

The bounce-averaged drift velocity V_d is [Hamlin et al., 1961]

$$V_d \approx Ar_0v^2(0.7 + 0.3 \sin \alpha) \quad (4)$$

where $A = 3m_p/2qB_0r_0^2$ (B_0 is the equatorial magnetic field at $r = r_0$, and m_p and q are the proton mass and charge).

At any other time and longitude the distribution function is $f(v, \alpha, \phi, t) = f_1(v, \alpha)$

$$\cdot \exp \{-[\phi - Av^2t(0.7 + 0.3 \sin \alpha)]^2/(\Delta\phi)^2\} \quad (5)$$

Studying the derivative $\partial f/\partial \alpha$ for given values of v, ϕ , and t , one easily shows that there are generally three extrema in the pitch angle distribution function. One is obtained for $\alpha = 90^\circ$ at any time; the two others are symmetrical with respect to $\alpha = 90^\circ$. Let α_1 and $180 - \alpha_1$ be these two pitch angles.

They satisfy (for $\alpha_1 \geq \alpha_{LC}$)

$$\frac{t}{\phi} = \frac{1 + \{1 + 4m(\Delta\phi/\phi)^2[(0.7 + 0.3 \sin \alpha_1)/^{\wedge}3(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_{LC})]\}}{2Av^2(0.7 + 0.3 \sin \alpha_1)} \quad (6)$$

tion after an injection event. The formalism that is used is similar to one already used in a previous work [Solomon, 1975].

THEORY

It is assumed that protons are injected at a time $t = 0$, at a given geocentric distance $r_0 = L R_E$, and with a distribution function which is azimuthally dependent:

$$f(v, \alpha, \phi, t = 0) = f_1(v, \alpha) \exp [-(\phi/\Delta\phi)^2] \quad (1)$$

where ϕ is the azimuthal angle measured from a given initial value $\phi_0 = 0$ and $\Delta\phi$ is the initial width of the distribution.

The energy and angular distribution function of the protons is taken to be of the following form:

$$f_1(v, \alpha) = [n_1 C(\alpha_{LC})/\pi^{3/2} m! U^3] \cdot [v(\sin \alpha - \sin \alpha_{LC})/U]^{2m} \exp [-(v/U)^2] \quad \alpha \geq \alpha_{LC} \quad (2)$$

$$f_1(v, \alpha) = 0 \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_{LC}$$

in which n_1 is the initial proton density, m is the anisotropy factor, α_{LC} is the equatorial loss cone angle, $C(\alpha_{LC})$ is the corresponding normalization factor ($C(\alpha_{LC}) = 1$ if $\alpha_{LC} = 0$), and U is related to the mean quadratic velocity by

$$U^2 = (v^2)/(m + \frac{1}{2}) \quad (3)$$

Copyright © 1976 by the American Geophysical Union.

Let t_{90} be the time for which (6) is satisfied with $\alpha_1 = 90^\circ$. It is easy to show that for $t > t_{90}$, $\alpha = 90^\circ$ corresponds to a minimum in the distribution function and that $\alpha = \alpha_1$ or $\alpha = 180 - \alpha_1$ corresponds to a maximum. The distribution functions for different values of $t > t_{90}$ are represented on Figure 1 (for the case $\alpha_{LC} = 0$), where we have plotted the angular part of the distribution function given by (5):

$$Y(\alpha) = \sin^{2m} \alpha \cdot \exp [-(\phi - Av^2t(0.7 + 0.3 \sin \alpha))^2/(\Delta\phi)^2] \quad (7)$$

We see on Figure 1 the appearance of the two symmetric maxima. Nevertheless, in the experimental results on Figure 2 of Konradi et al. [1973] there is some discrepancy with our theoretical results in the sense that they observe another maximum at 90° as time elapses. This central maximum is due either to the previously existing trapped particles or to the fact that the injection event is sporadic and lasts a finite time.

Because of the rather large energy width of the measuring device it should be necessary, in principle, to integrate the distribution function over the corresponding energy interval. But in fact, when the energy spectrum is steep enough, the particles with the lowest energies are the dominant ones. Furthermore, with our assumption the flux $j(\alpha, E)$ is proportional to $(E/E_0)^{m+1} \exp (-E/E_0)$, where $E_0 = m_p U^2/2$. Taking $E_0 \approx 20$ keV [Konradi et al., 1973, Figure 1a], we obtain $j(139$ keV)/ $j(79$ keV) $\sim 9\%$, which clearly shows that the results are

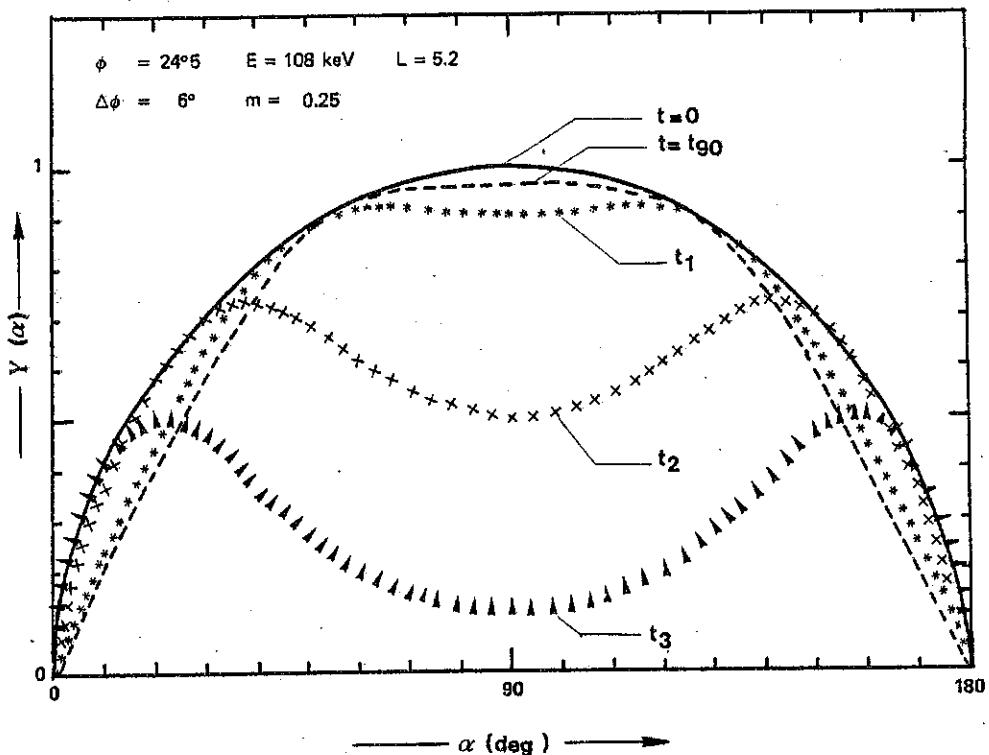


Fig. 1. Time evolution of the pitch angle distribution function at a given longitude. The quantity which is plotted is $Y(\alpha)$. For the numerical values which have been chosen, $t_{00} = 335$ s, $t_1 = 344$ s, $t_2 = 381$ s, and $t_3 = 428$ s. Note the appearance of two off 90° maxima when $t > t_{00}$. We have also drawn for comparison the distribution function at $t = 0$ and $\phi = 0$.

dominated by the lowest-energy particles. A clear illustration of this fact is shown in Figures 2a and 2b. We see in these figures that the maxima in pitch angle at a given time are hardly changed when we introduce the energy spectrum of the particles. However, for the purpose of comparison with the results of Konradi *et al.* [1973] we have chosen the value of E used by them.

In (6) the coefficient $(\frac{1}{2}Av^2)$ may be replaced by $(2.10 \times 10^6/LE)$ if t is expressed in seconds, ϕ in radians, and E in keV. Our (6) is therefore similar to the one which was used by Konradi *et al.* [1973] if ϕ and t are replaced by $\phi - \phi_0$ and $t - t_0$ and if we assume that m or $\Delta\phi$ is equal to zero. There is also a slight difference because Konradi *et al.* [1973] have used the complete expression $F(\alpha)/G(\alpha)$ ($E(\alpha)/T(\alpha)$) in the notation of Hamlin *et al.* [1961]) and not the approximate analytical expression (4). This leads to slight differences for low pitch angles. Nevertheless, the major difference which appears between our (7) and the formula of Konradi *et al.* at low pitch angles stems from the existence of a finite anisotropy of the distribution function and of a finite width of the injection region. Precise measurements at low pitch angles would consequently allow for an estimation of these two interesting quantities.

COMPARISON WITH EXPERIMENTAL DATA

We have drawn in Figure 3 the experimental and theoretical values of α_1 that Konradi *et al.* [1973] have published, together with our theoretical computation. The parameters that we have assumed are the same: $\phi = 24.5^\circ$, $E = 108$ keV, and $L = 5.2$.

We have also chosen for m , $\Delta\phi$, and α_{LC} different sets of values:

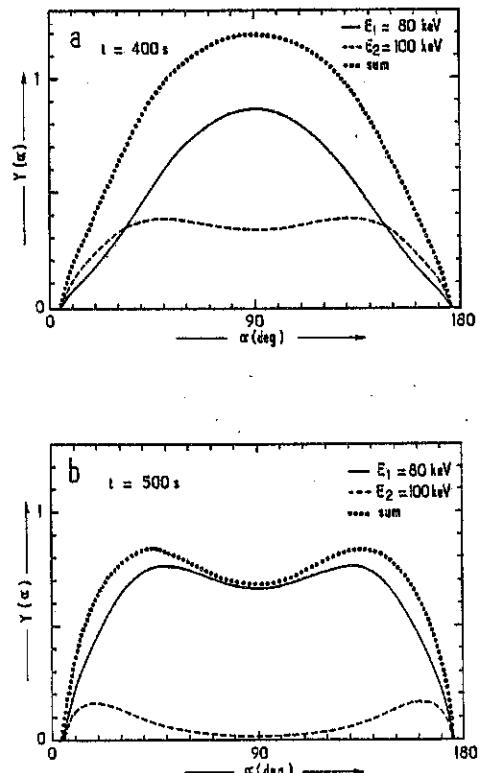


Fig. 2. Distribution function in pitch angle $Y(\alpha)$ for two different energies at a given time. $Y(\alpha)$ is normalized to 1 for $E_1 = 80$ keV and is multiplied by 0.5 for $E_2 = 100$ keV to take into account the steep energy spectrum of the particles. The summation of the two curves is also shown. The values of ϕ , $\Delta\phi$, m , and L are the same as they were in Figure 1. The computations have been done for a finite value of the loss cone angle $\alpha_{LC} = 5^\circ$.

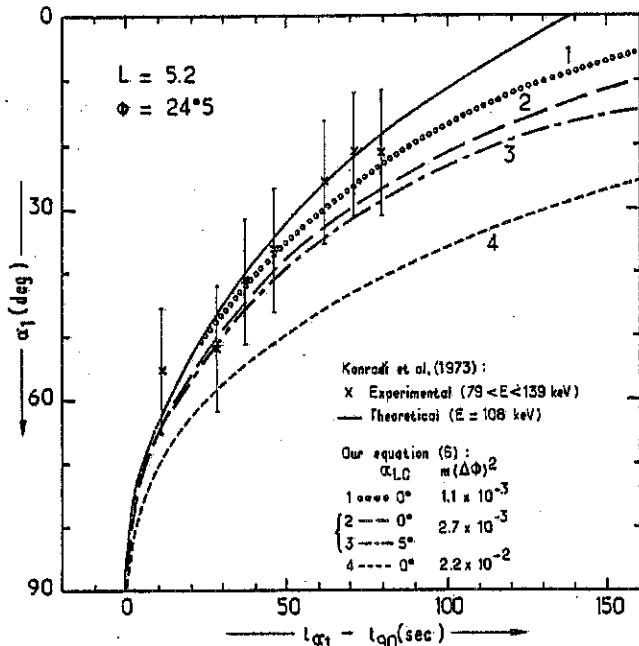


Fig. 3. Time of occurrence of the maximum in the distribution function at a given pitch angle α_1 . For the numerical values which have been chosen, $t_{90} = 318$ s [Konradi *et al.*, 1973], and from our (6), $t_{90} = 327$ s (curve 1), $t_{90} = 335$ s (curves 2 and 3), and $t_{90} = 419$ s (curve 4). Note that in the Konradi *et al.* [1973] computation, $\alpha_1 = 0$ after a finite time. We also give an estimated value of the error on α_1 : $\Delta\alpha_1 \approx \pm 10^\circ$ from Figure 2 of Konradi *et al.* [1973].

Set 1

$$m = 0.1 \quad \Delta\phi/\phi = 0.25 \quad \alpha_{LC} = 0^\circ$$

$$m(\Delta\phi)^2 = 1.1 \times 10^{-3} \text{ rad}^2$$

Set 2

$$m = 0.25 \quad \Delta\phi/\phi = 0.25 \quad \alpha_{LC} = 0^\circ \text{ and } 5^\circ$$

$$m(\Delta\phi)^2 = 2.7 \times 10^{-3} \text{ rad}^2$$

Set 3

$$m = 0.5 \quad \Delta\phi/\phi = 0.5 \quad \alpha_{LC} = 0^\circ$$

$$m(\Delta\phi)^2 = 2.2 \times 10^{-2} \text{ rad}^2$$

We see that the best fit of the experimental data down to the value $\alpha = 20^\circ$ seems to be the theoretical curve of Konradi *et al.* [1973], thus indicating that the initial anisotropy of the injected protons was probably very small (curves 1-3 in Figure 3 may also be considered valid approximations).

Note that if we have chosen $E = 79$ keV as a more representative energy of the detected particles, our curves would have remained unchanged except for a change in ϕ and a smaller change in $m(\Delta\phi)^2$. (For instance, curve 2 of Figure 3 with $m(\Delta\phi)^2 = 2.7 \times 10^{-3} \text{ rad}^2$ and $\phi = 24.5^\circ$ would remain the same with $\phi = 18^\circ$ and $m(\Delta\phi)^2 = 1.6 \times 10^{-3} \text{ rad}^2$.)

The important point to note is that for low pitch angles the theoretical curve of Konradi *et al.* [1973] is different from our curves. In theory, in our computations it would take an infinite time before observing a maximum in the pitch angle distribution at $\alpha = 0$, whereas in the Konradi *et al.* [1973] computations it would take a finite time. Moreover, for the case of an empty loss cone the curve that we obtain is not very different from the case $\alpha_{LC} = 0$, provided that α is not too close to α_{LC} , but the time t tends to infinity for $\alpha_1 = \alpha_{LC}$. Of course, the case $t \rightarrow \infty$ for $\alpha = 0$ (or $\alpha = \alpha_{LC}$) is a pure mathematical limit because other phenomena will become dominant in a finite time, such as new injections or even echoes if the particles are not lost before they have accomplished one complete azimuthal revolution. For a better comparison with experimental data we need measurements at lower pitch angles ($\alpha_1 \leq 20^\circ$). As long as the distribution function of the injected particles may be approximated by (1) and (2), such data could allow us to determine precisely the product $m(\Delta\phi)^2$ and therefore to get more information on the injection process itself.

CONCLUSION

The importance of the azimuthal width and of the initial anisotropy of protons injected during substorms has been stressed. These quantities have effects which appear when we consider the deformation of the whole distribution function with time and longitude and which are more important for low pitch angle protons.

Acknowledgments. I would like to thank R. Gendrin and R. Pellat for fruitful discussions and advice.

The Editor thanks A. Konradi and another referee for their assistance in evaluating this report.

REFERENCES

- Hamlin, D. A., R. Karplus, R. C. Vik, and K. M. Watson, Mirror and azimuthal drift frequencies for geomagnetically trapped particles, *J. Geophys. Res.*, 66, 1-4, 1961.
- Konradi, A., D. J. Williams, and T. A. Fritz, Energy spectra and pitch angle distributions of storm time and substorm-injected protons, *J. Geophys. Res.*, 78, 4739-4744, 1973.
- Solomon, J., Drift of particles and wave-particle interactions, in *The Magnetosphere of the Earth and Jupiter*, edited by V. Formisano, pp. 153-159, D. Reidel, Dordrecht, Netherlands, 1975.

(Received March 24, 1975;
accepted January 28, 1976.)

CONVECTION AND WAVE-PARTICLE INTERACTIONS

Jacques SOLOMON

Centre de Recherches en Physique de
l'Environnement Terrestre et Planétaire -

CNET, 3 Avenue de la République,
92131 ISSY-LES-MOULINEAUX - France

and

René PELLAT

Centre de Physique Théorique

Ecole Polytechnique
91120 PALAISEAU - France

Abstract - We study, by means of the adiabatic invariants and of the Liouville theorem, the deformation of the distribution functions of substorm injected particles in the magnetosphere. Assuming a steady-state convection process, we can obtain simple analytical expressions for the particle flux, the anisotropy and the growth rate of an electromagnetic cyclotron interaction. These expressions depend on the ratio between the electrostatic potential energy and the resonant energy of the particles. This allows us to obtain an overall view of the wave particle interactions in the outer magnetosphere. These computations are applied to the ring current proton interactions with ion cyclotron waves.

I - INTRODUCTION

Although this may look as an oversimplification, it is possible to describe the convection of the energetic particles injected from the tail of the magnetosphere, as consisting of two successive phases. In a first phase, the particles penetrate radially under the effect of a strong convection electric field, from the large values of L ($L \sim 10$) towards the small ones ($L \sim 5$). This gives rise to a certain radial density gradient. Then, in a second phase the particles start to move azimuthally under the combined effects of the magnetic gradient-curvature drifts and of a much smaller convection electric field.

We study this second phase of the process. This way differs from the one which has been used previously (see, for instance, Ashour-Abdalla and Cowley, 1974 ; Cowley and Ashour-Abdalla, 1975) where the movement of the particles is studied from its very origin ($L = 10$). Dealing only with the second phase of the process, we avoid an important difficulty, which is that it is not really possible, starting from $L = 10$, to build up in a steady-state convection a distribution function which resembles the data observed at small L -values. This difficulty arises because of the probable existence of a time dependent convection electric field (Roederer and Hones, 1974). To some extent, this time dependence is included into our two phases model.

Thus we assume a given distribution function in the midnight meridian, taken as the azimuthal origin $\phi = 0$, which presents a radial density gradient. Then we compute the distribution function, resulting from a steady state convection process, at any other points ($L, \phi \neq 0$) in the equatorial plane. We deduce from it the growth rate of the unstable waves and we can

discuss some consequences with respect to wave-particle interactions (WPI) induced by the convection process.

Let us examine the case of the energetic protons (10-100 kev) and of the electromagnetic ion cyclotron waves. Similar computations could be made for electrons interacting with the whistler mode.

Partial approaches of this problem have already been made. Southwood and Kilvelson (1975) have computed numerically the changes of distribution functions produced by an electric potential on an arbitrary initial L-density profile in the midnight meridian.

Independently, Solomon (1975) and Lin and Parks (1976) have computed the longitudinal variation of ion cyclotron growth rates induced by magnetic drifts only. Jentsch (1976) has done a similar computation for electron cyclotron waves, by a numerical analysis of the magnetic and electric drifts.

II - COMPUTATION OF THE DISTRIBUTION FUNCTION AS A FUNCTION OF (L, ϕ)

We assume a distribution function of the energetic protons in the midnight meridian (subscript M) of the form :

$$(1) \quad f(\alpha_M, v_M, L_M, \phi_M = 0) =$$

$$\frac{n_1}{n_o} \frac{(L_M/L_g)^p}{\pi^{3/2} v_o^3 \Gamma(m+1)} \left(\frac{v_M}{v_o} \right)^{2m} \left[\exp - \left(\frac{v_M^2}{v_o^2} \right) \right] \sin^{2m} \alpha_M$$

f is normalised to (n_1/n_0) . n_1 is the density of the energetic protons at some given position ($L_1, \phi_M = 0$). n_0 is the cold plasma density which depends on L and ϕ . α , v are the pitch-angle and the total velocity of the particle ; v_0 is the characteristic velocity and m the initial anisotropy. The term $(L_M/L_g)^p$, where L_g is a scaling factor, stands for the radial density gradient for $\phi_M = 0$. We may choose p either positive or negative in order to represent the different experimental situations.

To compute f at any other point (L, ϕ) , we make use of the three invariants of the movement of the particles with the help of which we will express α_M, v_M, L_M as a function of α, v, L, ϕ at the position (L, ϕ) . Then, by use of the Lionville theorem we will write $f(\alpha, v, L, \phi) \equiv f[\alpha_M(\alpha, v, L, \phi), \dots]$. The three invariants appear as :

the conservation of the total energy

$$(2) \quad v_M^2 = v^2 + \frac{2q}{m_i} [\Psi(L, \phi) - \Psi_M(L_M, \phi_M)]$$

where $\Psi(L, \phi)$ is the electrostatic potential, q and m_i the charge and mass of the proton.

,

The first adiabatic invariant

$$(3) \quad v_M^2 L_M^3 \sin^2 \alpha_M = v^2 L^3 \sin^2 \alpha$$

The second adiabatic invariant (approximation for large pitch-angles ; Roederer, 1970; Schulz, 1971).

$$(4) \quad v_M L_M \cos^2 \alpha_M = v L \cos^2 \alpha$$

combining (2), (3) and (4), it is easy to get the following equation :

$$(5) \quad L_M^3 - \frac{v}{[v^2 + \frac{2q}{m_i} (\Psi - \Psi_M)]^{1/2}} L L_M^2 \cos^2 \alpha$$

$$- \frac{v^2}{v^2 + \frac{2q}{m_i} (\Psi - \Psi_M)} L^3 \sin^2 \alpha = 0$$

which allow us to compute $L_M = L_M(L, v, \alpha, \phi)$ because Ψ_M does not depend on ϕ_M [see (6)]. L_M is the initial geocentric distance (in the midnight meridian plane) of particles founded at the point (L, ϕ) with a velocity (v, α) .

For the proton electrostatic energy we write (Roederer, 1970) :

$$(6) \quad q\Psi = - (C_1 / L R_e) - C_2 L R_e \sin \phi$$

a formula which takes into account both the corotation (C_1) and the convection (C_2) electric fields and in which the azimuthal angle ϕ is taken positive westward. $C_1 = 91.5 \text{ kev } R_e^{-1}$ (R_e , radius of the earth) and $0.5 \text{ kev } R_e^{-1} < C_2 < 2 \text{ kev } R_e^{-1}$. Then setting

$$(7) \quad \beta = \left\{ \frac{v^2 - \frac{2C_2}{m_i} L R_e \sin \phi}{v^2} \right\}^{1/4}$$

$$(8) \quad \delta = \frac{2C_1}{m_i R_e v^2} \frac{1}{L}$$

$$(9) \quad [1 + (1 - \frac{L}{L_M})]^{\delta/3} \frac{L}{L_M} = \beta z$$

The equation (5) can be written as :

$$(10) \quad z^3 \sin^2 \alpha + z \cos^2 \alpha - \beta = 0$$

The condition of validity of this equation is $\delta \lesssim 1$, i.e. the energy of the particles at the position (L, ϕ) should be at least of the order of the characteristic variation of the corotation electrostatic energy (~ 10 kev).

Equation (5) gives, as a valuable solution :

$$(11) \quad z \approx 1 - [(1 - \beta) / (1 + 2 \sin^2 \alpha)]$$

Note also that :

$$(12) \quad \frac{\partial z}{\partial \alpha} = \frac{z (1 - z^2)}{3 z^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}$$

$$\approx \frac{2 (1 - \beta) \sin 2 \alpha}{(2 \sin \alpha + 1)^2}$$

an expression that we will use later on. Also with (7), (9) and (10) in (4) we get :

$$(13) \quad \sin^2 \alpha_M = (1/\beta) z^3 \sin^2 \alpha$$

Now from the Liouville theorem and with the help of (2), (9), (13) we obtain for the distribution function at any point in the equatorial plane :

$$(14) \quad f(a, v, L, \phi) \approx \frac{n_1}{n_0} \cdot \frac{(L/L_g)^p}{\pi^{3/2} v_0^3 \Gamma(m+1)}$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\frac{v}{v_0} \right)^{2m} \left[\exp - \left(\frac{v^2}{2} \right) \right] \sin^{2m} \alpha \left[\exp 2 \epsilon_0 \right] \\ & \times \left[\exp \delta_0 [1 - (\beta z)^{1 + \delta/3}] \right] \\ & \times (\beta z)^{3m-p} (\beta z)^{[(1 + \delta/3)m \delta - p(\delta/3)]} \end{aligned}$$

with $\delta_0 \equiv \delta(v = v_0)$

$$\epsilon = \frac{C_2 L R_e \sin \phi}{m_i v^2}$$

$$\epsilon_0 \equiv \epsilon(v = v_0)$$

For an explicite expression of f we have to use (11).

As a first illustration, we will use (14) in order to compute the flux of the energetic protons $J(L, \phi)$, knowing $J(L_M, \phi_M = 0)$ in the midnight meridian plane.

III - ASYMMETRIC FLUX OF THE RING CURRENT ENERGETIC PROTONS

We compute the flux $[(m^2 \cdot sec \cdot sr)^{-1}]$ of 90° pitch angle protons as

$$(15) \quad J(L, \phi, v_1 \leq v \leq v_2, \alpha = \pi/2) = n_0 \int_{v_1}^{v_2} f v^3 dv$$

and we get an approximative expression for the ratio of the fluxes at midnight and at any other local position :

$$(16) \quad J(L, \phi) / J(L_M, \phi_M) \approx (L/L_M)^P$$

$$[\exp 2 \epsilon_0] \left[\exp \delta_0 \left[1 - (1 - \frac{2}{3} \epsilon_1)^{1 + \frac{\delta_1}{3}} \right] \right]$$
$$(1 - \frac{2}{3} \epsilon_1)^m [3 + (1 + \frac{\delta_1}{3}) \delta_1] - p (1 + \frac{\delta_1}{3})$$

with : $\epsilon_1 \equiv \epsilon(v = v_1)$

$\delta_1 \equiv \delta(v = v_1)$

we have used the fact that the energy spectrum is hard enough so that we can neglect the term in v_2 .

It is easy to physically interpret the effect of the different terms in (16) when we move off from the midnight meridian plane. The increasing exponential factors originates from the newly accelerated particles, the energy of which then exceeds v_1 . The last term of (16) is linked to the radial penetration of the particles and its effect depends on the sign and on the magnitude of the parameter p and on the magnitude of the anisotropy factor m . Essentially, for the outer gradient ($L > 4$, $p \sim (-4)$, $m \sim 1$) this term corresponds to a flux decrease and for the inner gradient ($p \sim 7$ to 10 , $m \sim 1$) it corresponds to a flux increase. Note also that if the energy of the particles increases, i.e. ϵ_0 , ϵ_1 , δ_0 , δ_1 go to zero, all the effects vanish : very high

energy particles are not sensitive to the electric field and do not penetrate radially, so that the flux is independant of ϕ .

Our figures 1 and 2 illustrate (16). We have used, as a source in the midnight meridian plane, Frank's (1970) data about the energetic proton flux after a magnetic storm and we have computed from (16) the resulting flux in the evening sector ($\phi = \pi/2$). In fact, in figure 1, in order to compare our results with the previous computations of Kilvelson and Southwood (1975), who have used a Maxwellian distribution function, we have to modify slightly (16); we must divide it by

$$\left(1 - \frac{\epsilon_1}{2}\right)^{4m} \left(1 - \frac{2}{3}\epsilon_1\right)^m \delta_1 \left(1 + \frac{\delta_1}{3}\right)$$

Using this analytical formula, we obtain a curve quite close to the one which Kilvelson and Southwood (1975) have obtained, when we choose identical values of the initial parameters. We also show, on this figure 1, the effect of neglecting the corotation field ($\delta_1 = \delta_0 = 0$). On figure 2 we show that, by choosing properly the initial parameter v_0 , we can with the help of (16), reproduce Frank's (1970) measurements of the proton flux in the evening sector. In any case we get the well-known asymmetric ring current flux. The comparison of our results (or those of Kilvelson and Southwood) with Frank's data does not look as good as it could, because of the time lag of some hours between the midnight and dusk measurements. These problems will always arise when using one satellite only.

IV - FORMULA FOR THE ANISOTROPY AND THE GROWTH RATE OF THE ELECTROMAGNETIC ION CYCLOTRON WAVES

Now, let us consider the problem of the electromagnetic ion-cyclotron waves. We only examine the case of waves propagating parallel to the static magnetic field. The growth rate γ , the number of resonant particles η and the anisotropy A can be expressed as (Kennel and Petschek, 1966) :

$$(17) \quad \gamma/\omega_{ci} = \frac{\pi}{2} \frac{(1-x)^2}{x(1-x/2)} \eta(v_r) [A(v_r) - \frac{x}{1-x}]$$

$$(18) \quad \eta(v_r) = 2\pi |v_r|^3 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} f(\alpha, v_r) d\alpha$$

$$(19) \quad A(v_r) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^4 \alpha} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)_v d\alpha / 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} f(\alpha, v_r) d\alpha$$

where $x = (\omega/\omega_{ci})$ is the reduced frequency, $(\omega/2\pi)$ the wave frequency and ω_{ci} the ion cyclotron frequency. The resonant velocity v_r is given by :

$$(20) \quad |v_r| = v_A \frac{(1-x)^{3/2}}{x}$$

where v_A is the ion Alfvén velocity. Note that all the integration have to be performed keeping $v_r = \text{const.}$

We use (14) with (7), (11), (12) and we get for γ and A the following expressions :

$$(21) \quad \gamma/\omega_{ci} \approx \frac{n_i}{n_o} \frac{\sqrt{\pi}}{2 \Gamma(m+1)} \left(\frac{L}{L_g}\right)^p \left(\frac{v_o}{v_A}\right) \left(\frac{v_r}{v_o}\right)^{2m+4}$$

$$[\exp 2\epsilon_o] [A(v_r) - \frac{x}{1-x}] \int_1^\infty (u-1)^m g(u) du$$

$$(22) \quad A(v_r) \approx m + [m(3+\delta_r) - p - \delta_o] \epsilon_r I_r$$

with

$$\epsilon_r = \frac{c_2 L R_e \sin \phi}{m_i v_r^2}$$

$$\delta_r = \frac{2c_1}{m_i R_e L v_r^2}$$

$$I_r \approx \int_1^\infty \frac{(u-1)^{m+1}}{(3u-2)^2} g(u) du \quad \left/ \int_1^\infty (u-1)^m g(u) du \right.$$

$$g(u) \equiv [\exp(-\frac{v_r^2}{2} u)] [1 - \frac{\epsilon_r}{u} \frac{2u-1}{3u-2}]^{[m(3+\delta) - p - \delta_o]}$$

All the integrals are easy to perform numerically. Furthermore I_r ($\sim 5 \times 10^{-2}$) is not too sensitive to the effective values of the different parameters. We only consider here the case of the outer gradient, so we can neglect in a first approximation the corotation terms, i.e. $\delta_r = \delta = \delta_o = 0$ (see fig. 1).

We have drawn on figure 3 the anisotropy (22) as a function of ϵ_r and for different values of the ratio (v_r^2/v_o^2) . For the outer gradient ($L > 4$,

$p \approx -4$) A increases with ϵ_r , which means that, at a given local position ($L, \phi \neq 0$), A increases when the convection electric field (C_2) increases or when the resonant energy of the particles (V_r^2) diminishes. Nevertheless, for typical values of the resonant energy $\epsilon_r \lesssim 1/4$ and the increase in anisotropy is small. This illustrates the fact that it is difficult to generate anisotropic distribution function by using only a steady-state convection model.

We turn now to the growth rate (21) and we compute it numerically at some characteristic positions in space (figure 4). First we start from midnight ($\phi_M = 0$) at $L = 6$ and we move towards dusk ($\phi = \pi/2 ; L = 6$). This results in an increase of the growth rate (corresponding to the flux asymmetry) and a widening towards higher frequencies, an effect which is due to the associate change in anisotropy ; but the peak frequency of γ does not change. Then moving earthward to the point ($\phi = \pi/2 ; L = 4$) we observe an increase of this peak frequency which is essentially due to the variation of the cold plasma density (we have taken $n_0 \propto L^{-4}$).

These results can be applied to IPDP emissions which are characterized by an increase of their central frequency ($f \sim 0.2$ Hz to 1.5 Hz) in a time delay of about twenty minutes to one hour. These emissions can be explained by the resonant interaction between electromagnetic ion-cyclotron waves and freshly injected protons drifting radially and azimuthally as originally proposed by Gendrin and Lacourly (1968) (see also Gendrin, 1970). The change in frequency is probably due to the change of the growth rate as a function of L (figure 4) and the time delay is the result of the differential drift of the protons on different L shells (for $\alpha = \pi/2$, the azimuthal drift velocity can be written from Hamlin et al's formula (1961) : v_D (m/s) $\approx 15 L^2 E$ (kev)).

Nevertheless an extensive study of the IPDP's problem is beyond the scope of this paper.

CONCLUSION

We have tried to give, by mean of not too sophisticated computations, a coherent view of the relation between the convection process and the wave particle interaction. This is of importance, for instance, for a better understanding of the dynamic of the ring current protons, although other phenomena as charge exchange process (Cornwall, 1977) have also to be considered. Moreover we have only dealt with the linear growth rate and the next step, namely diffusion in velocity space (see Etcheto et al, 1973) could somewhat improve this picture.

Acknowledgments. We would like to thank R. Gendrin for many fruitful discussions.

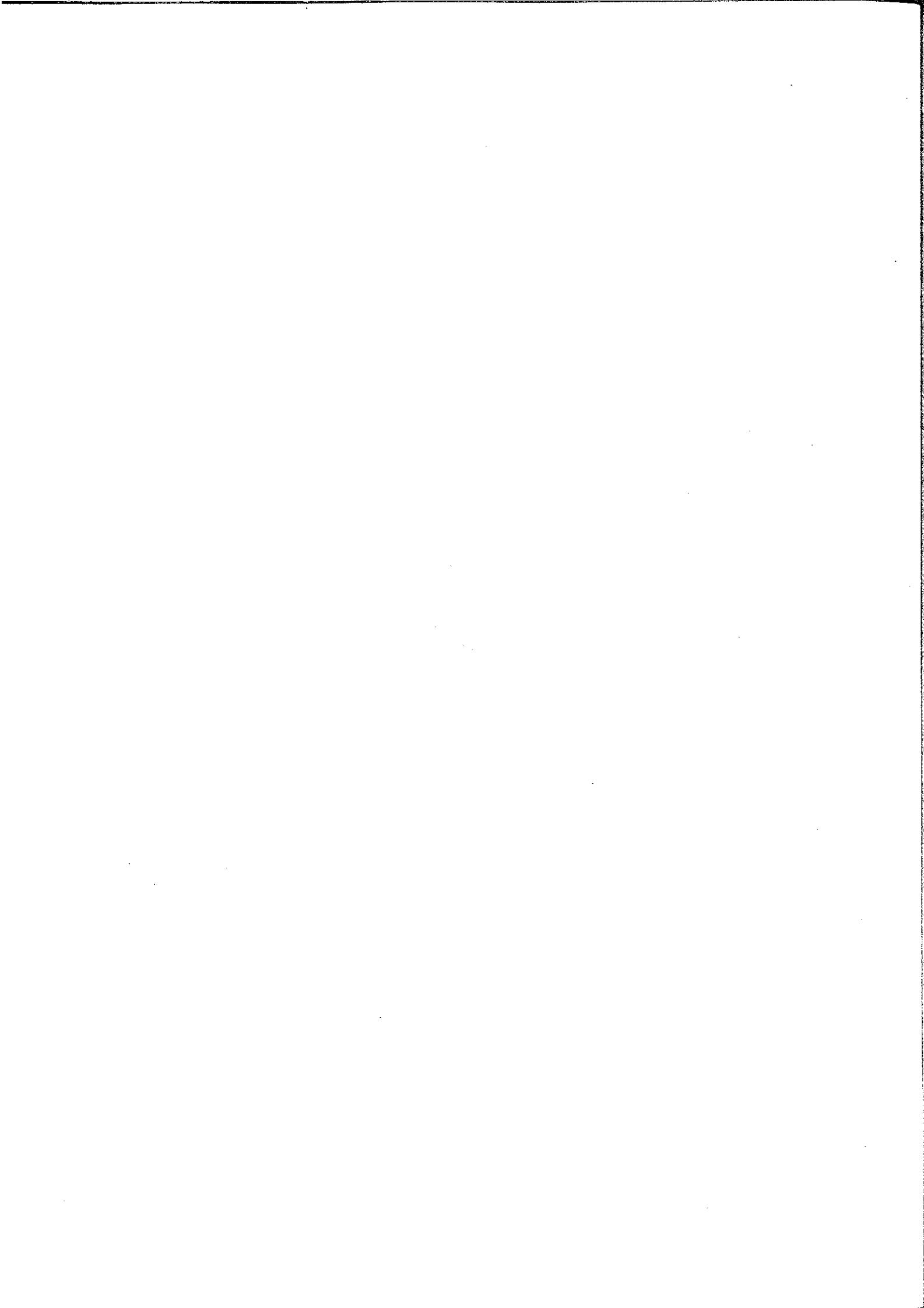
FIGURE CAPTIONS

Figure 1 - The fluxes of the ring current protons in the evening sector (pitch-angle $\alpha = \pi/2$) ; energy range 31 to 49 kev) after Kilvelson and Southwood (1975) and after our formula (16) modified, using Frank's measurements (1970) at midnight as a source. In both cases values of the parameters are the following : $E_o = (1/2 m_i v_o^2) = 10$ kev, $m = 1$, $C_2 = 2$ kev R_e^{-1} ; moreover we have chosen $p = -4$ for $L \geq 3.5$ and $p = 9$ for $L < 3.5$.

Figure 2 - Frank's (1970) measurements of the ring current protons at midnight and in the evening sector ($\alpha = \pi/2$; $31 \leq E \leq 49$ kev) and theoretical curve obtained from (16) (not modified) in the evening sector using the midnight experimental flux as a source. The initial parameters are the same than for the figure 1, except that $E_o = 9$ kev.

Figure 3 - The anisotropy as a function of the ratio ϵ_r of the electrostatic energy gained by the particle to its local resonant energy. We have assumed an anisotropy $m = 0.5$ in the midnight meridian plane.

Figure 4 - The reduced growth rate (γ/ω_{ci}) of the ion cyclotron instability versus the reduced frequency x at three different positions in the equatorial plane. Values of the parameters at $L = 6$, $\phi_M = 0$ are the following : $n_1/n_o = 0.1$, $m = 0.5$, $p = -4$; $(v_o/v_A)^2 = 10$, $E_o = 10$ kev ; Moreover $C_2 = 2$ kev R_e^{-1} and $n_o \propto L^{-4}$.



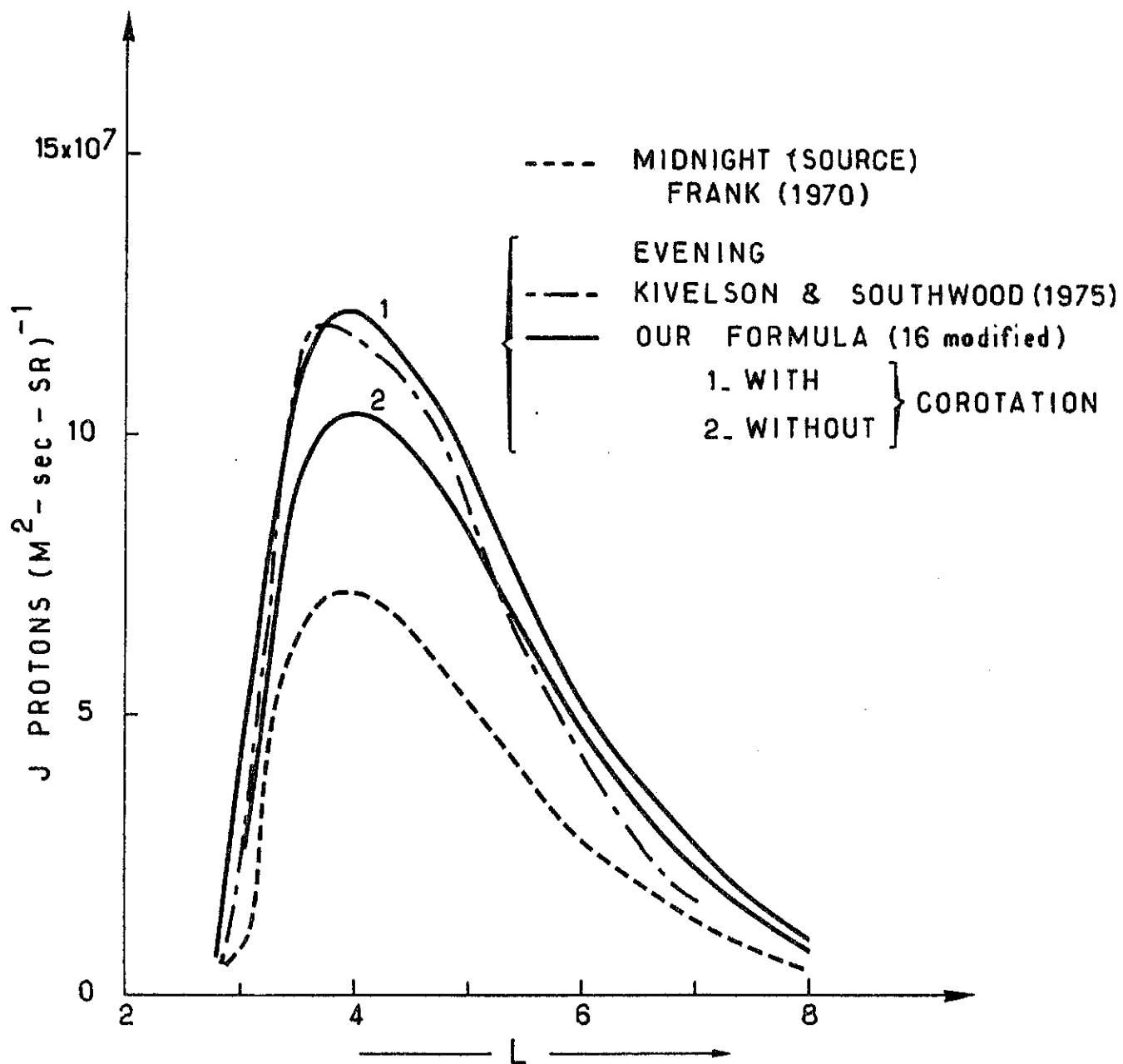


Fig. 14 -

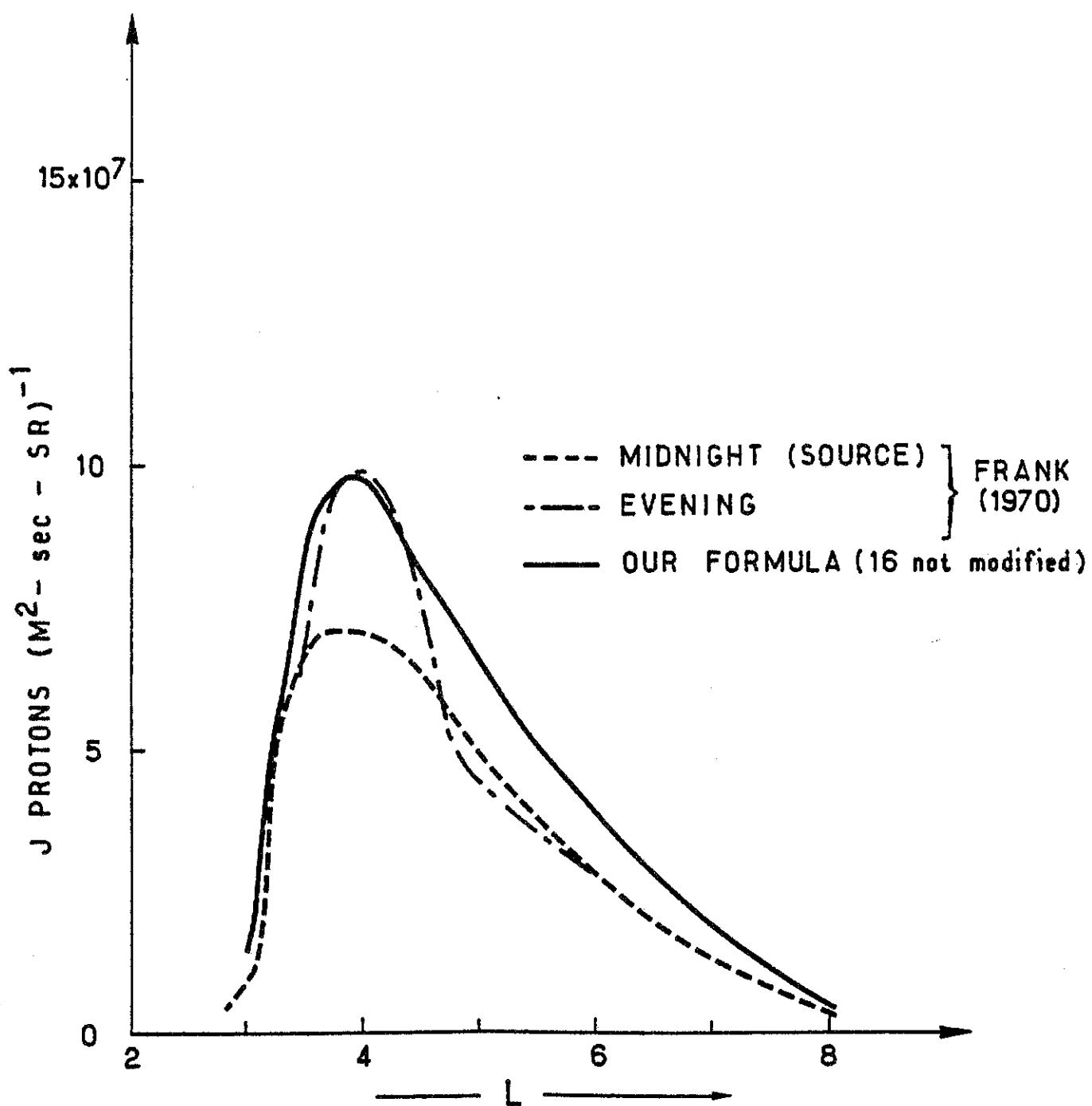


Fig. 15

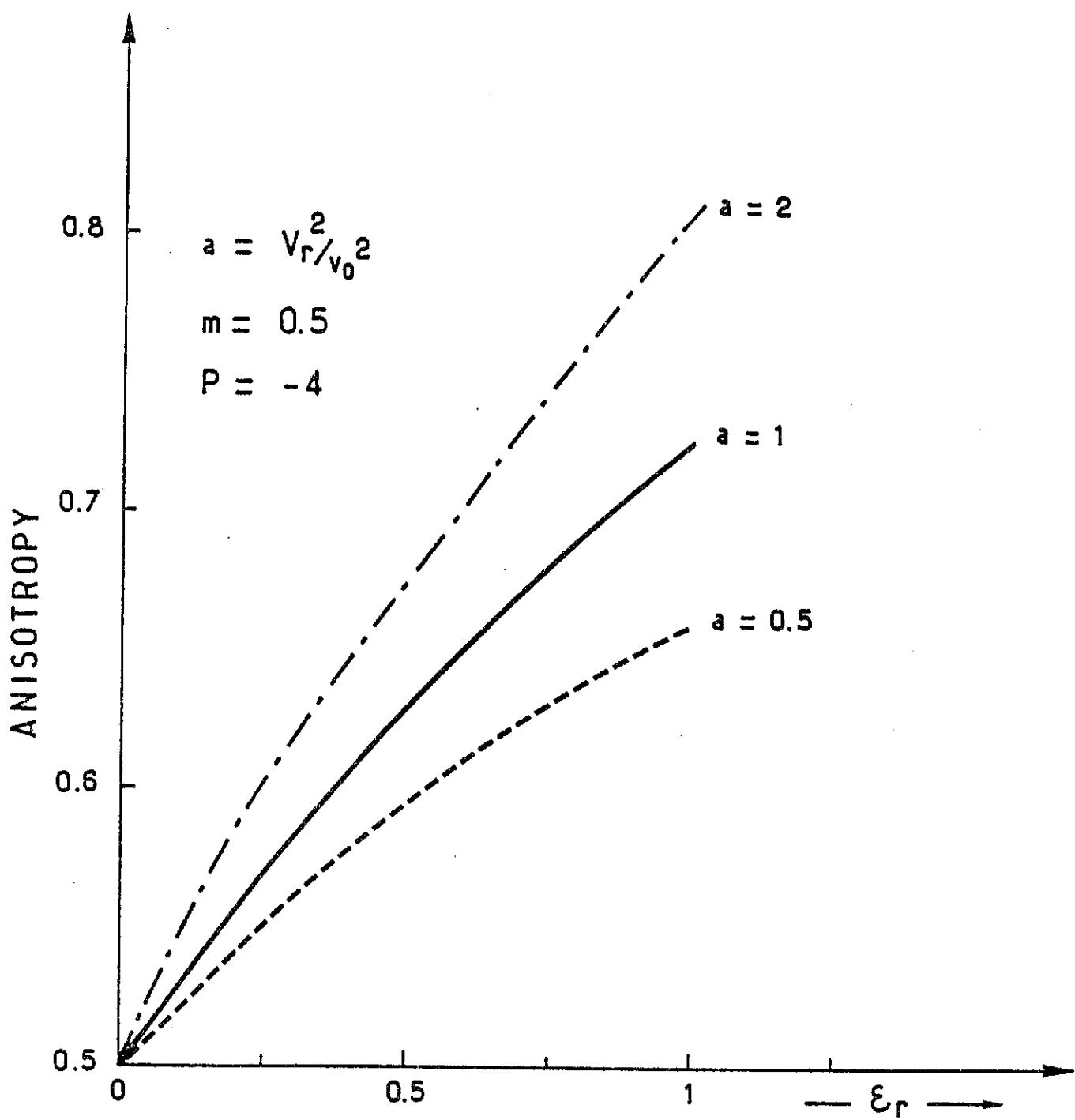


Fig. 16

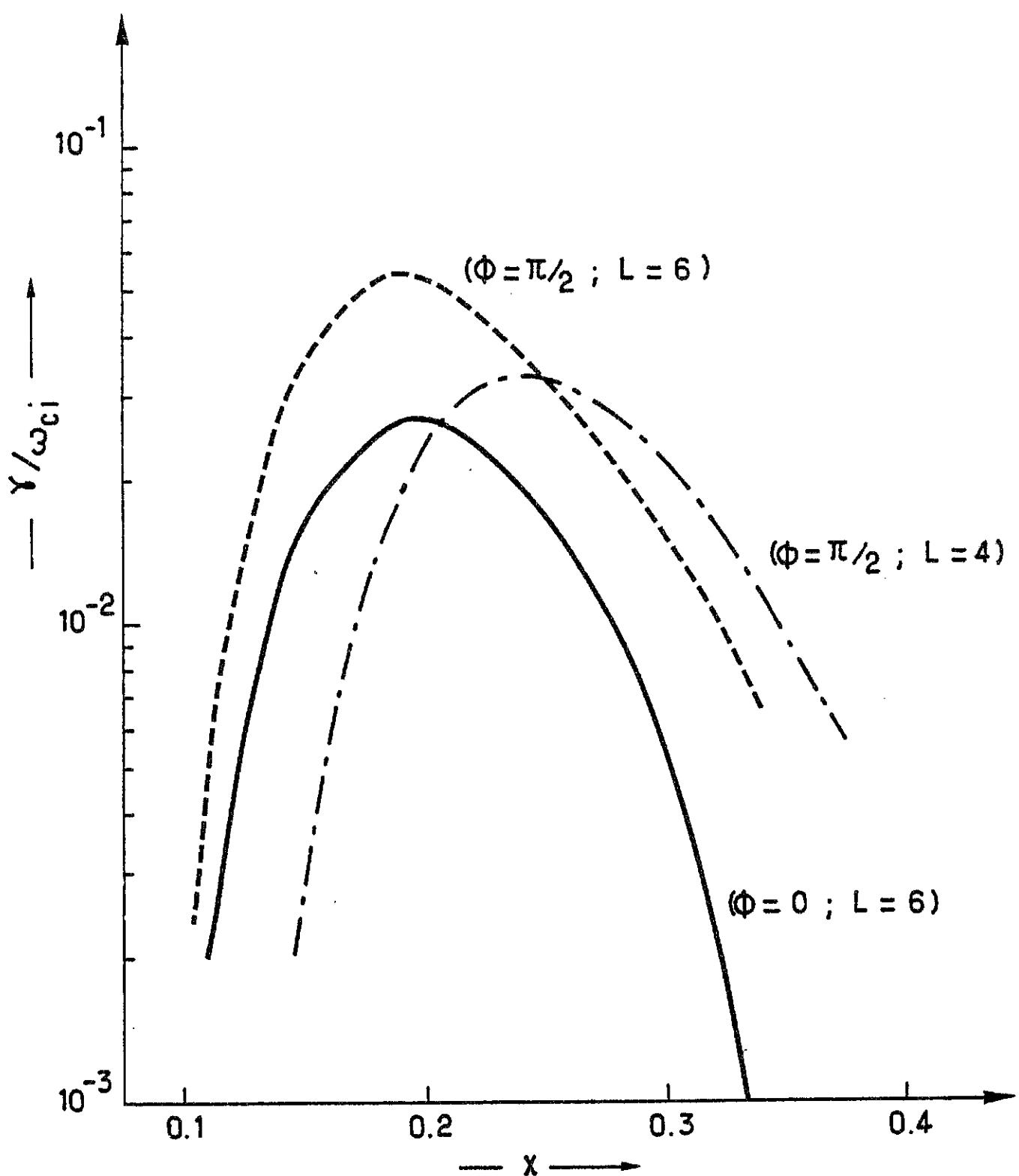


Fig. 17

REFERENCES

- ASHOUR-ABDALLA M. and COWLEY S.W.H., 1974, Magnetospheric Physics (Edited by B.M. Mc Cormac) pp 241-270. Reidel, Dordrecht.
- CORNWALL J.M., 1977, J. Geophys. Res., to be published.
- COWLEY S.W.H. and ASHOUR-ABDALLA M., 1975, Planet. Space Sci., 23, 1527.
- ETCHETO J., GENDRIN R., SOLOMON J. and ROUX A., 1973, J. Geophys. Res., 78, 8150.
- FRANK L.A., 1970, J. Geophys. Res., 75, 1263.
- GENDRIN R. and LACOURLY S., 1968, Annls. Géophys., 24, 267.
- GENDRIN R., 1970, Space Sci. Rev., 11, 54.
- HAMLIN D.A., KARPIUS R., VIK R.C. and WATSON K.M., 1961, J. Geophys. Res., 66, 1.
- JENTSCH V., 1976, J. Geophys. Res., 81, 135.
- KENNEL C.F. and PETSCHEK H.E., 1966, J. Geophys. Res., 71, 1.
- KILVELSON M.G. and SOUTHWOOD D.J., 1975, J. Geophys. Res., 80, 56.
- LIN C.S. and PARKS G.K., 1976, J. Geophys. Res., 81, 3919.
- ROEDERER J.G., 1970, Dynamics of geomagnetically trapped radiation, Springer-Verlag, Berlin.
- ROEDERER J.G. and HONES E.W.Jr., 1974, J. Geophys. Res., 79, 1432.
- SCHULZ, M., 1971, J. Geophys. Res., 76, 3144.
- SOLOMON J., 1975, The magnetosphere of the Earth and Jupiter (Edited by V. Formisano) pp 153-159. Reidel, Dordrecht.