

Avec la participation de :



PUBLIC : Etudiants en Master, doctorants, post-doctorants, chercheurs...

MOTS CLES : Dynamique Hamiltonienne, Intégrabilité, Painlevé, Algèbre de Lie, Schrödinger, Plasmas, Systèmes et milieux complexes, Séries temporelles.

INTRODUCTION À LA DYNAMIQUES DES SYSTÈMES NON LINÉAIRES ET À SES APPLICATIONS. CHAOS, INTÉGRABILITÉ, ANALYSE DE SÉRIES TEMPORELLES DU 9 AU 13 AVRIL 2018

Responsables de la formation : A. Bourdier, « Adjunct Professor » à l'Université du Nouveau Mexique. O. Delage, chercheur associé à l'observatoire de la physique de l'atmosphère de la Réunion.

La dynamique des systèmes non linéaires appliquée à l'étude des dynamiques complexes constitue un axe de recherche qui n'est plus confiné aux laboratoires de recherche mais qui au vu de ses nombreuses applications (Physique, Energie, Biotechnologie, Mécanique, Chimie,...) intéresse de plus en plus les sciences de l'ingénieur. La motivation de l'ingénieur dans cette branche de connaissance réside dans le développement d'outils permettant de caractériser et d'étudier la stabilité et la prédictibilité de processus chaotiques.

La "Dynamique Hamiltonienne" joue un rôle clé en physique des plasmas et dans le domaine des faisceaux de particules. Elle peut être appliquée à l'étude de problèmes de physique complexes comme l'interaction laser matière à haut flux ou la propagation de faisceaux de particules chargées relativistes.

Elle constitue également une des bases de la mécanique quantique. Le schéma conceptuel utilisé par Schrödinger pour établir son équation repose sur une analogie formelle entre l'optique et la mécanique. Les systèmes dynamiques incluent les systèmes Hamiltoniens conservatifs et les systèmes dissipatifs. Le concept d'attracteur étrange apparaît dans le cas des systèmes dissipatifs.

Cette formation a deux objectifs principaux :

- 1- Présenter les bases de la dynamique Hamiltonienne et ses corollaires : intégrabilité, chaos déterministe, chauffage stochastique. Il sera utilisé pour traiter l'interaction onde-particule en régime non linéaire.
- 2- Définir à partir des techniques et paramètres liés à la détection et la mesure du chaos, un cadre mathématique destiné à développer des méthodes numériques capable de caractériser les comportements chaotiques.

La formation s'articulera en deux parties :

- **Partie 1** : La dynamique Hamiltonienne et son formalisme. Les principaux points communs entre mécanique Hamiltonienne et mécanique quantique seront décrits. On montrera comment la dynamique Hamiltonienne permet de traiter l'interaction onde-particules en régime non linéaire. Cette partie contiendra également une introduction aux méthodes non-perturbatives permettant d'exhiber des solutions exactes d'équations différentielles non linéaires ordinaires (EDO), aux dérivées partielles (EDP) et aux différences finies. On se limitera aux EDOs.

- **Partie 2** : Dans cette partie on élargira l'étude aux systèmes dissipatifs, on abordera la définition des attracteurs étranges et on appliquera les techniques vues dans la première partie à la physique de l'atmosphère dans l'Océan Indien au travers de séries temporelles de mesure obtenues à partir d'une **technique de télédétection par laser basée sur l'instrumentation LIDAR**. On s'efforcera de dresser un cadre mathématique destiné au développement de méthodes numériques capables de caractériser la dynamique de l'atmosphère, d'identifier les acteurs principaux responsable de cette dynamique.

Les cours se dérouleront au LPGA (Bât. 210) à la faculté des Sciences d'Orsay.

Pour s'inscrire contacter : Alain Bourdier, E – mail : alain.bourdier@gmail.com,

Tel : 0610275548. Site web : <https://sites.google.com/site/dynamiquehamiltonienne/>

Pas de frais d'inscription

**PROGRAMME PRÉVISIONNEL DE LA FORMATION SYSTÈMES DYNAMIQUES, DYNAMIQUE
HAMILTONIENNE, CHAOS, INTÉGRABILITÉ, SÉRIES TEMPORELLES 2018**

Lundi 9 Avril	Mardi 10 Avril	Mercredi 11 Avril
9h – 9h30 : <i>Accueil</i>	9h – 10h30 (1h30) : F. André - Thales <i>Formulation Hamiltonienne de l'électrodynamique classique</i>	9h – 10h30 (1h30) : R. Conte –LRC MESO, Cachan, <i>Méthodes non perturbatives pour les équations différentielles</i>
<i>Pause</i>	<i>Pause</i>	<i>Pause</i>
9h30 - 10h30 (1h) : A. Bourdier – Université du Nouveau Mexique <i>Introduction aux Chaos</i>	10h45 -12h15 (1h30) : J.P. Ebran - CEA/DIF/DPTA <i>Physique sans temps</i>	10h45 -12h45 (2h) : O. Delage – Université de la Réunion <i>Caractérisation du chaos . Séries temporelles</i>
10h45 - 12h 15 (1h30) : G. Damamme – CEA/Gramat <i>Introduction aux systèmes dynamiques et à la Dynamique Hamiltonienne</i>		
<i>Repas</i>	<i>Repas</i>	<i>Repas</i>
13h30 - 15h30 (2h) : R. Conte – LRC MESO, Cachan, <i>Méthodes non perturbatives pour les équations différentielles</i>	13h30 -15h30 (2h) : G. Damamme – CEA/Gramat <i>Introduction aux systèmes dynamiques et à la Dynamique Hamiltonienne</i>	13h30 -15h (1h30) : D. Benisti - DIF/DPTA/PPE Interaction ondes-particules en régime non linéaire
<i>Pause</i>	<i>Pause</i>	<i>Pause</i>
15h45 – 17h15 (1h30) O. Delage – Université de la Réunion <i>Caractérisation du chaos . Séries temporelles</i>	15h45 – 17h45 (2h) A. Bourdier – Université du Nouveau Mexique <i>Introduction aux Chaos et à ses applications</i>	16h15 – 17h45 (1h30) : F. André - Thales <i>Formulation Hamiltonienne de l'électrodynamique classique</i>

Jeudi 12 Avril	Vendredi 13 Avril
9h – 10h30 (1h30): G. Damamme – CEA/Gramat <i>La Dynamique Hamiltonienne. comme base de la mécanique quantique</i>	9h – 10h30 (1h30) : R. Conte –LRC MESO, Cachan <i>Méthodes non perturbatives pour les équations différentielles</i>
<i>Pause</i>	<i>Pause</i>
10h45 - 12h15 (1h30) : O. Delage – Université de la Réunion <i>Caractérisation du chaos . Séries temporelles</i>	10h45 -12h15 (1h30) : D. Benisti - DIF/DPTA/PPE Interaction ondes-particules en régime non linéaire
<i>Repas</i>	<i>Repas</i>
13h30-15h (1h30) : D. Benisti - CEA/DIF/DPTA Interaction ondes-particules en régime non linéaire	13h30 -14h30(1h) : O. Delage_ A. Bourdier Université de la Réunion Université du Nouveau Mexique CONCLUSION
<i>Pause</i>	<i>Pause</i>
15h15 – 16h45 (1h30) : J.P. Ebran - CEA/DIF/DPTA <i>Physique sans temps</i>	

SYSTÈMES DYNAMIQUES, DYNAMIQUE HAMILTONIENNE , CHAOS, INTÉGRABILITÉ

Applications à des phénomènes non linéaires et aux problèmes à échelles de temps multiples. Introduction aux équations différentielles. Intégrabilité des systèmes

*Contact : Alain Bourdier, E – mail : alain.bourdier@gmail.com, Port. : 0610275548
Site web : <https://sites.google.com/site/dynamiquehamiltonienne/>*

Les cours auront lieu au laboratoire de Physique des gaz et des plasmas Faculté des Sciences d'Orsay Bât. 210 du 9 au 13 Avril 2018

Ce sujet sera traité principalement par huit cours :

1^{er} cours : COURS DE BASE SUR LES SYSTÈMES DYNAMIQUES

Enseignant : Alain Bourdier (CEA/DIF/DPTA)

Durée du cours : 3h

L'objectif de ce cours sera de présenter les bases de la "Dynamique Hamiltonienne" et ses corollaires : intégrabilité, chaos déterministe, chauffage stochastique.

- La "Dynamique Hamiltonienne" joue un rôle majeur en physique des plasmas et des faisceaux de particules. Elle peut être appliquée à l'étude de problèmes de physique complexes comme l'interaction laser matière à haut flux ou la propagation de faisceaux de particules chargées relativistes.
- Elle constitue également une des bases de la mécanique quantique. Le schéma conceptuel utilisé par Schrödinger pour établir son équation repose sur une analogie formelle entre l'optique et la mécanique. Pour une particule massive non relativiste, l'équation de Hamilton-Jacobi pour la fonction caractéristique de Hamilton ressemble formellement à l'équation de l'eikonale (le principe variationnel associé étant le principe de moindre action).

Certaines présentations peuvent laisser penser que les formalismes Lagrangien et Hamiltonien ne sont que des changements de variables sans intérêt majeur pour la compréhension de la mécanique. Ce n'est pas le cas ; le formalisme Hamiltonien permet un changement de point de vue radical. Il découle, du formalisme énergétique introduit par Leibnitz et diffère complètement de celui de Newton.

La structure des équations de Hamilton fournit un outil très puissant; elle permet de trouver les invariants d'un système et ainsi de le réduire. On peut ainsi étudier l'intégrabilité d'un système et voir dans quelles situations le chaos peut s'installer.

Elle permet une introduction aux calculs de perturbation qui s'appliquent aussi bien en physique atomique et nucléaire qu'aux problèmes d'électromagnétisme. La "Dynamique Hamiltonienne" s'applique aussi aux domaines de l'astrophysique, par exemple, le problème de la stabilité du système solaire.

La Dynamique Hamiltonienne est un outil de référence pour étudier l'interaction champ particule. Une application à l'accélération par onde de sillage a été récemment étudiée. À des flux modérés (à des flux en dessous du seuil de wavebreaking) une onde seule crée un sillage en se propageant dans un plasma sans permettre le piégeage de particules. En provoquant de l'accélération stochastique à l'aide d'un laser contrepropagatif, on pré accélère des électrons qui sont ensuite piégés dans l'onde de sillage. On peut ainsi maîtriser l'accélération par onde de sillage.

Ce cours s'adresse préférentiellement aux ingénieurs chercheurs, doctorants et post doctorants, des différentes unités concernées par les domaines plasmas, lasers, faisceaux de particules... Elle a pour objet de familiariser les stagiaires avec le formalisme Hamiltonien (transformations canoniques, équation de Hamilton-Jacobi, méthodes de perturbation de type Bogoliubov-Mitropolsky, critère de Chirikov...).

Il y aura une partie cours et une partie TD pour illustrer le cours.

2^{ème} cours : LA DYNAMIQUE HAMILTONIENNE. COMME BASE DE LA MÉCANIQUE QUANTIQUE

Enseignant : Gilles Damamme (DAM/Direction Scientifique)

Durée du cours : 5h

L'objectif de ce cours est de présenter les principaux points communs entre mécanique hamiltonienne et mécanique quantique et de les illustrer sur des exemples simples.

La Dynamique Hamiltonienne constitue une des bases de la mécanique quantique. Le schéma conceptuel utilisé par Schrödinger pour établir son équation repose sur une analogie formelle entre l'optique et la mécanique. Pour une particule massive non relativiste, l'équation de Hamilton-Jacobi pour la fonction caractéristique de Hamilton ressemble formellement à l'équation de l'eikonale (le principe variationnel associé étant le principe de moindre action),...

Historiquement la quantification a été introduite à partir des invariants adiabatiques de la mécanique quantique (problème élémentaire du pendule de longueur variable et quantification des énergies de l'oscillateur harmonique par exemple).

Les analogies de structure entre les deux mécaniques, hamiltonienne et quantique, méritent plus généralement d'être soulignées et développées, dont :

Crochets de Poisson et commutateurs de la M. Q.

Variables conjuguées, variables angle-action

Equations d'évolution dans les deux mécaniques

Grandeurs en involution (de la mécanique hamiltonienne) et opérateurs commutant (de la M. Q.)

Structure symplectique de la mécanique hamiltonienne et conséquence sur les schémas numériques

Action, trajectoire classique (extremum de l'action) et intégrale de chemin de la M. Q.

Invariants (intégrales premières) et théorème de Noether (symétrie du Lagrangien – invariance par groupe continu de transformation – recherche de ces transformations (équations de Killing ; identité de Rund-Trautmann)),

Méthodes de perturbation en dynamique hamiltonienne et en M.Q.

3^{ième} COURS : METHODES NON-PERTURBATIVES POUR LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

**Enseignant : Robert Conte (LRC MESO, ENS Cachan
CEA/DAM/DPTA)**

Durée du cours : 5h

Contenu : Ce cours est une introduction aux méthodes non-perturbatives permettant d'exhiber des solutions exactes d'équations différentielles en tous genres (ordinaires (EDO), aux dérivées partielles (EDP), aux différences finies) pourvu qu'elles soient non-linéaires. Nous nous limitons ici au cas des EDOs.

Méthodes utilisées : exploitation des singularités a priori des solutions (c'est-à-dire sans connaître ces solutions).

Méthode inutilisée (mais complémentaire) : les symétries de Lie.

Ci-dessous, résumé détaillé du cours projeté, qui s'inspirera fortement du livre [7].

1. Une mauvaise idée : perturber la partie linéaire

2 Cheminement naturel vers la propriété de Painlevé

3 Nécessité. Le test de Painlevé, un passage obligé

4 Suffisance. Intégration explicite

4.1 Génération systématique des intégrales premières polynomiales

4.2 EDOs autonomes d'ordre un

4.3 EDOs d'ordre deux ou EDOs déjà "classées"

6 Exercices

4^{ième} COURS : FORMULATION HAMILTONIENNE DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE CLASSIQUE

Enseignant : Frédéric André (Thales)

Durée du cours : 3h

Dans cet exposé on s'attache à exprimer l'électrodynamique classique sous une forme hamiltonienne. Nous nous plaçons dans le cas le plus général où les particules rayonnent un champ électro-magnétique. Ce rayonnement se produit en raison du domaine dans lequel elles se meuvent (effet Tcherenkov) ou en raison de leur accélération (rayonnement synchrotron).

Cet exposé est donc une occasion de manipuler un hamiltonien général qui permet de résoudre des cas physiques réels sans commettre d'approximation. Nous prendrons l'exemple du tube à onde progressive (TOP). C'est un dispositif utilisé comme amplificateur d'onde électromagnétique. Outre son intérêt pratique il illustre le phénomène universel d'instabilité convective dans les plasmas. Nous verrons comment la formulation hamiltonienne permet de calculer numériquement les caractéristiques du dispositif.

Ce cours comporte donc une introduction sur l'intérêt de la formulation et les difficultés de son application à l'électrodynamique. Ensuite nous verrons comment trouver cette formulation pour l'électromagnétisme seul, puis pour des électrons couplés aux ondes. Enfin nous décrirons sa résolution numérique dans le cas du TOP.

5^{ème} COURS : CARACTÉRISATION DU CHAOS : PRÉDICTION DES SÉRIES TEMPORELLES

Enseignant : Olivier Delage (Université de La Réunion)

Durée du cours : 5h30

Résumé :

Les interactions entre la chimie atmosphérique et le climat est un sujet d'étude qui reçoit une attention accrue dans la littérature. Une région de l'atmosphère où la chimie atmosphérique et le climat sont étroitement liés est la zone haute troposphère/basse stratosphère (UTLS). Cette zone opère la transition du transport vertical entre les émissions anthropiques provenant de la surface vers la moyenne atmosphère et joue un rôle important à la fois dans le bilan énergétique terrestre et le changement climatique. Le transport dans cette région et notamment les échanges avec la tropopause s'opère à l'aide d'une combinaison de processus dont la dynamique est d'une grande complexité et qui régissent la composition chimique de l'UTLS.

Ainsi, la variabilité de la composition chimique de l'UTLS et notamment les changements dans les distributions de vapeur d'eau et d'ozone impactent directement les quantités de rayonnement absorbés, diffusés et réémis.

Du fait que, la vapeur d'eau est la principale source de refroidissement dans la haute troposphère et que l'ozone est la principale source de réchauffement dans la basse stratosphère, un changement dans les distributions de ces deux composants induirait un changement dans le profil de température de l'atmosphère et impacterait le transport atmosphérique et la formation des nuages. La littérature actuelle dans ce domaine ne reflète que la composition chimique ainsi que les processus responsables de sa variabilité souffrent encore d'une compréhension incomplète due à un manque d'observation et des modèles qui nécessitent d'être améliorés. Parmi les dispositifs expérimentaux permettant d'observer les différentes couches atmosphériques, on considérera principalement les dispositifs de mesure type LIDAR qui reste l'unique technique permettant l'obtention de la distribution verticale des particules.

L'analyse des interactions entre la chimie atmosphérique et la variabilité climatique va nécessiter l'étude de trois points :

- Un contexte d'observation multi-instrumenté. En effet, pour caractériser l'influence des variations d'un ensemble de paramètres liés à la chimie atmosphérique (comme les concentrations de vapeur d'eau, d'ozone ou d'aérosols) sur le profil de température, il sera nécessaire de faire des campagnes de mesure dans le cadre d'une synergie entre plusieurs types de LIDAR. Un autre cadre d'utilisation d'un tel contexte peut être de comparer les mesures d'un même paramètre à partir de plusieurs dispositifs type LIDAR
- La résolution d'un problème inverse visant à déterminer un ensemble de paramètre liés à la chimie de l'atmosphère $\vec{x}(t)$ défini par

$$\vec{x}(t) = \{\text{concentration vapeur d'eau, concentration ozone, etc}\}$$

À partir de mesures d'observations $\vec{Y}(t)$ selon l'équation $\vec{Y}(t) = F(\vec{x}(t)) + \vec{n}(t)$ où F est le modèle direct et \vec{n} est le vecteur erreur incluant l'erreur de mesure est l'erreur

du modèle direct. Il s'agit donc d'inverser l'équation précédente pour obtenir un estimé \hat{x} de \bar{x} . L'approche utilisée pour résoudre ce problème inverse s'appuie sur la théorie de l'estimation optimale visant à obtenir une estimation « satisfaisante » de l'état d'un modèle à partir d'observations pouvant provenir de plusieurs instruments.

- Le développement de techniques d'assimilation de données permettant d'injecter des données dans un modèle avec pour objectif d'utiliser au mieux les données observées en fonction des propriétés de propagation de l'information dans le système physique modélisé.

6^{ième} COURS : CHAOS HAMILTONIEN DU SYSTÈME ÉLECTRON-ION EN PLASMA ARBITRAIREMENT MAGNÉTISÉ

Enseignant : Claude Deutsch (CNRS, LPGP UParis-Sud, 91405-Orsay)

Durée du cours : 5h

Se fixant comme objectif l'étude du ralentissement de particules chargées en régime non relativiste par les états liés et hydrogenoides du couple électron-ion en plasma extrêmement magnétisé ($B > 10^9 \text{G}$), on rappelle les caractéristiques chaotiques de la distribution d'états excités correspondante, i.e. lorsque la symétrie sphérique habituelle est brisée et que ne subsiste essentiellement comme règle de classification que la conservation de la parité. Le chaos hamiltonien résulte alors naturellement de la quasi égalité de l'attraction coulombienne électron-ion, éventuellement Debye modifiée et du terme diamagnétique provenant du champ magnétique appliqué. Le terme linéaire de l'effet Zeeman usuel est alors implicitement retenu dans le H_0 non perturbé.

A cet effet, on essaiera de comparer les approches quantiques habituelles, mais adaptées à une symétrie cylindrique, à une approche résolument classique, initiée de la limite $\lambda \rightarrow 0$, basée sur la condition de quantification Einstein-Brillouin-Keller (EBK), faisant usage de tores concentriques et imbriqués dans l'espace des phases qui garde alors une signification dépourvue d'ambiguïté, ce qui n'est pas le cas pour l'approche quantique.

7^{ième} COURS : INTERACTION ONDES-PARTICULES EN RÉGIME NON LINÉAIRE

Enseignant : Didier Bénisti (CEA/DIF/DPTA)

Durée du cours : 4h30

L'interaction ondes-particules est, généralement, un problème auto-cohérent : les ondes modifient la trajectoire des particules ce qui, en retour, affecte leur propagation. Le but de ce cours est de montrer en quoi les formalismes découlant du principe de moindre action peuvent fortement aider à la résolution de ce problème. En particulier, on décrira le formalisme Lagrangien développé par Whitham pour décrire la propagation des ondes et, de manière plus détaillée, le formalisme Hamiltonien appliqué au calcul de la dynamique non linéaire de particules chargées.

Le grand intérêt de passer par le formalisme Hamiltonien est de disposer d'une boîte d'outils très puissants, parmi lesquels figurent en bonne place le théorème adiabatique, ainsi que les théories de perturbation, que nous introduirons en discutant leur sens physique, ainsi que leurs limitations, et que nous appliquerons aux problèmes suivants, par ordre croissant de complexité :

1. L'accélération ionique à l'aide d'ondes radio-fréquence, ce qui peut être appliqué à la propulsion spatiale ainsi qu'à la génération de courant et le chauffage additionnel des tokamaks. Au travers de cette problématique nous introduirons les théories de perturbation comme théorie de moyennisation, en faisant ressortir le rôle particulier des sécularités. Nous aborderons aussi, rapidement, le théorème KAM et son corollaire, le théorème de Nekhoroshev.
2. La théorie quasilineaire en physique des plasmas, ce qui nous permettra de montrer comment appliquer une théorie de perturbation à un système dynamique qui est très loin d'être intégrable. Traiter la théorie quasilineaire nous permettra aussi d'aborder le transport chaotique, et de montrer comment établir un lien entre la mécanique rationnelle et la physique statistique en discutant la validité de l'équation de diffusion pour modéliser un système déterministe.

3. La propagation non linéaire d'une onde électrostatique dans un plasma de fusion. Cette problématique est de loin la plus complexe, et mêle l'utilisation du principe variationnel de Whitham, pour décrire la propagation des ondes, aux théories adiabatiques et perturbatives. Elle permet d'introduire certaines notions clef de la physique des plasmas, telles que la dissipation non collisionnelle (en particulier l'amortissement Landau et ses équivalents non linéaires), qui a eu un large retentissement dans diverses communautés scientifiques, et, notamment en mathématiques. L'application de cette étude à l'estimation de la rétrodiffusion Raman dans une installation telle que le Laser MégaJoule sera aussi abordée.

8^{ième} COURS : PHYSIQUE SANS TEMPS

Enseignant : J.P. Ebran (CEA/DIF/DPTA)

Durée du cours : 3h

La physique moderne a bouleversé notre compréhension de l'espace et du temps. De primats permettant d'appréhender le mouvement et le changement, ils sont aujourd'hui entendus comme langages commodes exprimant les relations qu'entretiennent les objets dynamiques ainsi que le changement dans ces relations.

Cette évolution de point de vue nous invite à une reformulation de la mécanique abandonnant la notion de temps, pré requis pour concevoir une théorie quantique de la gravitation. Ce cours abordera une formulation covariante de la mécanique au cœur de laquelle interviennent deux objets fondamentaux : la fonction de Hamilton (à ne pas confondre avec le Hamiltonien) pour la théorie classique et l'amplitude de transition pour la version quantique.