Université Paris-Saclay

Mathématiques : Mise à niveau I333a

Exercices pour la 3e année de licence E3A

Responsable de l'UE :

Thomas Colas

Institut d'Astrophysique Spatiale

Université Paris-Saclay

thomas.colas@ias.u-psud.fr

Auteur.e.s des exercices :

Samuel Cazayus-Claverie

Thomas Colas

Corinne Donzaud

2020-2021

Table des matières

Première partie

Algèbre linéaire

Chapitre 1

Calcul matriciel

1.1 Matrices

Exercice 1 : Multiplication de matrices

1. Considérons les matrices réelles suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$
$$D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculez si cela fait sens AB,BA,CD,DC,AE,CE.

Exercice 2 : Produit matriciel

1. Donner la définition du produit de deux matrices $A = [(a_{ij})]$ et $B = [(b_{ij})]$ de tailles (n, p) et (p, m). Quel est le format de la matrice produit ?
2. Soit A et B deux matrices carrées $n \times n$. Montrer que $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ et $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$ si et seulement si $AB - BA = 0$.

Exercice 3 : Matrices de Pauli

Les trois matrices de Pauli interviennent en mécanique quantique dans la description des particules de spin 1/2.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que pour $i = 1, 2, 3$, $(\sigma_i)^2 = I_2$.
2. Calculer le commutateur $[\sigma_1, \sigma_2] = \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1$.
3. Montrer que $\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}I_2$.

Exercice 4 : Matrices de rotation dans $\mathbb{R}^3$

Soit le repère $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Soit

$$A(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice associée à une rotation d'angle φ autour du vecteur $\overrightarrow{k}$. Calculer $A(\varphi_1)A(\varphi_2)$. Aurait-on pu deviner le résultat ?

2. Soit

$$B(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

la matrice associée à une rotation d'angle θ autour du vecteur $\overrightarrow{j}$. Calculer $A(\varphi)B(\theta)$ et $B(\theta)A(\varphi)$. Pour quelles valeurs de θ et φ ces produits sont-ils égaux ? À quelles transformations géométriques particulières correspondent alors les applications associées à $A(\varphi)$ et $B(\theta)$?

1.2 Trace, déterminant, rang

Exercice 5 : Calcul de déterminants

1. Calculer les déterminants suivants :

$$a = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 3/2 & 5/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{vmatrix}, \quad c = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}, \quad d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

2. Calculez, si c'est possible, le déterminant des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 7 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 1 & 5 & 1 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Soit

$$G = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $\det G$, le produit ${}^{T}GG$, et $\det({}^{T}GG)$.

Exercice 6 : Produit et Trace

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que $\mathrm{Tr}(A^TA) = 0$. Que dire de la matrice A ?
2. On suppose que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{Tr}(AX) = \mathrm{Tr}(BX)$. Démontrer que $A = B$.

1.3 Inversion

Exercice 7 : Cas simples d'inversion

1. Déterminez l'inverse de la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$
.
2. Soit une matrice P telle que $P^2 + P - I = 0$. Montrez que P est inversible et trouvez son inverse.

Exercice 8 : Condition d'inversibilité

Soit
$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
.

A quelle condition sur α cette matrice est-elle inversible ?

Exercice 9 : Inversion de matrices

Soient
$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si ces matrices sont inversibles, calculer leur inverse.

Exercice 10 : Usage de l'inversion

On considère
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer $P^{-1}AP$.
3. En déduire A^n où $n \in \mathbb{N}$

Exercice 11 : Matrices de rotation

Soit
$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
la matrice associée à une rotation d'angle θ dans $\mathbb{R}^2$.

Déterminer l'inverse de $R(\theta)$. Aurait-on pu deviner le résultat ?

Chapitre 2

Systèmes d'équations

2.1 Résolution de systèmes d'équations linéaires

Exercice 1 : Mettre un système sous forme matricielle

Ecrire sous forme matricielle les systèmes d'équations suivant

$$(S_1) : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2y + z = 3 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$(S_2) : \begin{cases} 2y + 4z = 1 \\ x - z = 4 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Exercice 2 : Matrices et suites

Soient $(a_n), (b_n)$ et (c_n) trois suites réelles telles que $a_0 = 1$, $b_0 = 2$ et $c_0 = 7$ et vérifiant les relations de récurrence

$$\begin{cases} a_{n+1} &= 3a_n + b_n \\ b_{n+1} &= 3b_n + c_n \\ c_{n+1} &= 3c_n \end{cases}$$

On souhaite exprimer a_n, b_n et c_n uniquement en fonction de n.

1. On considère le vecteur
$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$
Trouver la matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$.
2. En déduire que $X_n = A^n X_0$.
3. Soit
$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Calculer N^2, N^3 puis N^p pour $p > 3$.
4. Montrer que
$$A^n = 3^n \mathrm{Id}_n + 3^{n-1} n N + 3^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} N^2.$$
5. En déduire a_n, b_n et c_n en fonction de n.

2.2 Ensemble des solutions de l'équation $AX = B$

Exercice 3 : Cas où $\det A \neq 0$

On s'intéresse au système

$$(S) : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

1. Résoudre le système de manière directe.
2. L'écrire sous forme matricielle $AX = B$.
3. Calculer $\det A$. Que peut-on en déduire ?
4. Trouver X.

Exercice 4 : Cas où $\det A = 0$

On s'intéresse au système

$$(S) : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = -1 \\ y = a \end{cases}$$

1. Ecrire le système sous forme matricielle $AX = B$.
2. Calculer $\det A$. Que peut-on en déduire ?
3. Pour quelle valeur de a le système admet-il une infinité de solutions ? Pour quelles valeurs de a n'en admet-il aucune ?

Exercice 5 : Manipulation des colonnes et des lignes

1. Sans calcul, montrer que

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 14 & 8 \\ 2 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

   est divisible par 14.
2. Les nombres 119, 153 et 289 sont tous divisibles par 17. Montrer, sans le développer que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

   est divisible par 17. On se souviendra qu'on ne change pas un déterminant en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres.

2.3 Méthode de Gauss

Exercice 6 : Inversion de matrice à l'aide de la méthode de Gauss

En utilisant la méthode de Gauss, inverser la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7 : Un système de deux équations à deux inconnues

Résoudre de trois manières différentes (par substitution, par la méthode de Gauss et par inversion de la matrice) le système suivant

$$(S) : \begin{cases} 2x + y & = 1 \\ 3x + 7y & = -2 \end{cases}$$

Exercice 8 : Systèmes d'équations linéaires

Trouver , si elle(s) existe(nt), la (ou les) solution(s) des systèmes suivant :

$$(S_1) \quad : \quad \begin{cases} x + 3y + 3z & = 0 \\ x - \ \ y + \ \ z & = 0 \\ 2x + \ \ y + 3z & = 0 \end{cases}$$

$$(S_2) \quad : \quad \begin{cases} 3x & +y & & = & 1 \\ x & +2y & +z & = & 2 \\ & -y & +2z & = & -1 \end{cases}$$

$$(S_3) \quad : \quad \begin{cases} x & +2y & +z & = & 2 \\ x & -y & & = & 0 \\ -x & -5y & -2z & = & -4 \end{cases}$$

$$(S_4) \quad : \quad \begin{cases} x & +y & +z & & = & 0 \\ x & +y & & +t & = & 1 \\ x & & +z & +t & = & 1 \\ & y & +z & +t & = & 1 \end{cases}$$

Exercice 9 : Trop d'inconnues ou d'équations

Résoudre les systèmes suivants

$$(S_1) : \begin{cases} x + y + z - 3t = 1 \\ 2x + y - z + t = -1 \end{cases}$$

$$(S_2) : \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y - z = 11 \\ 2x + 5y - 5z = 13 \\ x + 4y + z = 18 \end{cases}$$

Exercice 10 : Existence de solutions

Etudier l'existence de solutions du système pour $a, b \in \mathbb{R}$

$$(S) : \begin{cases} ax + by + z & = 1 \\ x + aby + z & = b \\ x + by + az & = 1 \end{cases}$$

Chapitre 3

Diagonalisation

3.1 Bases et changements de base

Exercice 1 : Matrice d'une application linéaire

Soit

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, 2y, 3x-2y) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-3y, 2y+z) \end{array}$$

Ecrire les matrices de f, g, $f \circ g$, $g \circ f$ dans la base canonique.

Exercice 2 : Changement de bases

Munissons $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$. Introduisons $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est la suivante :

$$M = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

et posons $\varepsilon_1 = (1,0,1)$, $\varepsilon_2 = (1,1,1)$ et $\varepsilon_3 = (2,0,1)$.

1. Prouver que $\mathcal{C} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Construire $N = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{C})$ la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$.
3. Déterminer N^n pour $n \geq 1$.
4. En déduire l'expression de M^n pour $n \geq 1$.

Exercice 3 : Matrice de passage

Soit f représentée par la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$.

On considère une seconde base définie par $\mathcal{E} = \left\{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})\right\}$.

1. Ecrire les nouveaux vecteurs de base en fonction des anciens, puis inverser les relations.
2. En déduire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{E}$.
3. Réécrire la matrice de f relativement à $\mathcal{E}$. Aurait-on pu deviner ce résultat plus simplement ?

3.2 Diagonalisation

Exercice 4 : Diagonalisation d'une matrice 2×2

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Ecrire le polynôme caractéristique associé à la matrice A.
2. Trouver les valeurs propres et vecteurs propres associés.
3. Ecrire la matrice de passage P de la base canonique à la nouvelle base $\mathcal{B}$.
4. Peut-on diagonaliser la matrice A ? Si oui, écrire la matrice diagonale D.
5. Calculer P^{-1} et vérifier que la matrice diagonale s'écrit $D = P^{-1}AP$.
6. Soit X un vecteur de coordonnées (x, y) dans la base canonique. Quelles sont ces coordonnées dans la base $\mathcal{B}$?

Exercice 5 : Valeurs propres et vecteurs propres de matrices 3×3

On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculer leurs valeurs propres et vecteurs propres. Sont-elles diagonalisables ?

Exercice 6 : Matrice de rotation

Soit

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

1. A quelle opération géométrique correspond cette matrice ?
2. Calculez le polynôme caractéristique de A.
3. Trouver les valeurs propres et vecteurs propres de A.
4. Montrer que $AA^T = A^T A = \text{Id}$. On dit que cette matrice est orthogonale.

Exercice 7 : Exponentielle de matrices

Soit l'application $g \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans une certaine base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$

1. Donnez l'expression du polynôme caractéristique $\chi_g(\lambda)$ de g.
2. Donnez les valeurs propres de g.
3. Donnez trois vecteurs propres unitaires de g associés à ces valeurs propres. Montrez qu'ils forment une base de E, notée $\mathcal{B}'$.
4. Donnez la matrice représentative de g dans $\mathcal{B}'$.
5. On définit l'exponentielle de g par

$$\exp(g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^n}{n!}.$$

Donnez la matrice de $\exp(g)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

3.3 Applications

Exercice 8 : Deux suites réelles couplées

Soient deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ couplées par les relations de récurrence

$$\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = 3u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 2v_n \end{array}\right. .$$

1. Démontrer que $A^n = PD^nP^{-1}$ avec A, P et D les matrices introduites dans l'Exercice 4.
2. Calculer A^n.
3. En déduire u_n et v_n en fonction de u_0 et v_0

Exercice 9 : Résolution d'une équation différentielle linéaire

On se propose de résoudre l'équation différentielle $(E_1) : y'' + y' - y = 0$. On notera arbitrairement t la variable dont dépend y.

1. Quel est l'ordre de cette équation ?
2. Dans la base canonique $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^2$, on introduit la fonction vectorielle inconnue
$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$
Montrez que Y vérifie une équation de la forme $(E_2) : Y' = AY$ où A est une matrice à déterminer. Qu'a-t-on gagné à introduire une équation vectorielle ?
3. Calculez le polynôme caractéristique de A, d'inconnue X : $\chi_A(X) = \det(A - XI_3)$.
4. On appelle équation caractéristique de (E) l'équation $\chi_A(\lambda) = 0$. Résolvez cette équation. On notera λ_1 et λ_2 ses solutions, appelées valeurs propres de A.
5. En résolvant un système linéaire, proposez deux vecteurs v_1 et v_2 qui satisfont $Av_1 = \lambda_1 v_1$ et $Av_2 = \lambda_2 v_2$. On note $\mathcal{F} = (v_1, v_2)$ la base qu'ils forment
6. Ecrire la matrice D de l'application linéaire associée à A dans la base $\mathcal{F}$.
7. Réécrivez l'équation (E_2) dans cette nouvelle base. Résolvez ces deux équations en fonction du temps.
8. Déduisez-en la solution générale y en extrayant la première ligne de la solution dans la base canonique.

Deuxième partie

Analyse vectorielle

Chapitre 4

Systèmes de coordonnées et champs

4.1 Coordonnées cartésiennes, cylindriques, polaires

Exercice 1 : Manipuler les coordonnées

1. Soit le vecteur $\boldsymbol{OM}$ défini par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z). Donner les coordonnées cylindriques puis sphériques de ce vecteur en fonction de x, y et z.
2. Réciproquement, donner les expressions de x, y et z en fonction des coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) puis des coordonnées sphériques (r, θ, ϕ).
3. Donner les coordonnées des vecteurs de la base cylindrique $\boldsymbol{e_\rho}, \boldsymbol{e_\phi}, \boldsymbol{e_z}$ dans la base canonique $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.
4. Donner les coordonnées des vecteurs de la base sphérique $\boldsymbol{e_r}, \boldsymbol{e_\theta}, \boldsymbol{e_\phi}$ dans la base canonique $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

Exercice 2 : Système de coordonnées cylindriques

1. Définir le système de coordonnées cylindriques : le représenter schématiquement, donner le domaine de définition de chaque variable et définir le repère correspondant.
2. Exprimer le vecteur déplacement élémentaire dans ce système de coordonnées.
3. Exprimer la surface élémentaire sur le plan (Oxy).
4. Soit un cylindre circulaire droit d'axe (Oz), de rayon R et de hauteur H. Exprimer la surface élémentaire située sur la surface latérale de ce cylindre.
5. Exprimer l'élément de volume élémentaire à l'aide de ce système de coordonnées.

Exercice 3 : Système de coordonnées sphériques

1. Définir le système de coordonnées sphériques : le représenter schématiquement, donner le domaine de définition de chaque variable et définir le repère correspondant.
2. Exprimer le vecteur déplacement élémentaire dans ce système de coordonnées.
3. Exprimer l'élément infinitésimal de surface situé sur une sphère de rayon R.
4. Exprimer l'élément de volume élémentaire à l'aide de ce système de coordonnées.

4.2 Champ scalaire, Champ vectoriel

Exercice 4 : Champs de vecteurs

1. Dessiner le champ de vecteurs défini par l'expression $\boldsymbol{v}(M) = x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$. Donner son expression en coordonnées polaires (ρ, ϕ) dans la base $\boldsymbol{e_\rho}, \boldsymbol{e_\phi}$.

2. Dessiner le champ de vecteurs défini par l'expression $\boldsymbol{v}(M) = \rho \boldsymbol{e_\phi}$. Donner son expression en coordonnées cartésiennes (x, y) dans la base $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$.
3. Dessiner dans un plan méridien le champ de vecteurs défini dans l'espace par $\boldsymbol{v}(M) = r\boldsymbol{e_\theta}$. Pourquoi demande-t-on un dessin dans un plan méridien seulement ? Donner l'expression de ce champs en coordonnées cartésiennes dans la base $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

Exercice 5 : Changement de coordonnées

1. Soit le champ de vecteurs $\boldsymbol{v}(M) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}$. Donner son expression en coordonnées cylindriques dans la base $\boldsymbol{e_\rho}, \boldsymbol{e_\phi}, \boldsymbol{e_z}$ puis en coordonnées sphériques dans la base $\boldsymbol{e_r}, \boldsymbol{e_\theta}, \boldsymbol{e_\phi}$.
2. Soit le champ de vecteurs $\boldsymbol{v}(M) = (x^2 + y^2)(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})$. Donner son expression en coordonnées cylindriques dans la base $\boldsymbol{e_\rho}, \boldsymbol{e_\phi}, \boldsymbol{e_z}$ puis en coordonnées sphériques dans la base $\boldsymbol{e_r}, \boldsymbol{e_\theta}, \boldsymbol{e_\phi}$.
3. Soit le champ de vecteurs $\boldsymbol{v}(M) = \rho(\boldsymbol{e_\rho} + \rho \sin\phi \boldsymbol{e_\phi})$. Donner son expression en coordonnées sphériques dans la base $\boldsymbol{e_r}, \boldsymbol{e_\theta}, \boldsymbol{e_\phi}$ puis en coordonnées cartésiennes dans la base $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.
4. Soit le champ de vecteurs $\boldsymbol{v}(M) = r(\boldsymbol{e_r} + r\sin\theta \boldsymbol{e_\theta})$. Donner son expression en coordonnées cylindriques dans la base $\boldsymbol{e_\rho}, \boldsymbol{e_\phi}, \boldsymbol{e_z}$ puis en coordonnées cartésiennes dans la base $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

4.3 Dérivées

Exercice 6 : Dérivées partielles

1. Calculer les dérivées partielles premières des fonctions suivantes :
   (a) $f(x, y) = 2x^3 + 6xy + y^2$.
   (b) $g(x, y, z) = x^2 - (y - y_0)^2 + \epsilon z^2$ où ϵ et y_0 sont des constantes.
   (c) $h(\theta, \phi) = |\theta - \phi|$.
   (d) $i(x, t) = \frac{\sin(\omega t - kx)}{x}$ où ω et k sont des constantes.
   (e) $j(x, y) = x^y$ avec $x \geq 0$.
   (f) $k(x, y, z) = x^y + y^z + z^x$ avec $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $z \geq 0$.

2. Soit le champ scalaire
$$J(\rho, \theta) = \exp(-\frac{\rho}{\rho_0}\cos\theta),$$
avec ρ et θ les coordonnées polaires. Calculer $\dfrac{\partial^2 J}{\partial\rho\partial\theta}$ et $\dfrac{\partial^2 J}{\partial\theta\partial\rho}$. Que peut-on en conclure ?

3. Démontrer la relation de Maxwell de la thermodynamique :
$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$$
en utilisant les deux dérivées partielles de l'énergie libre F par rapport à la température T et à la pression P :
$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V \quad \text{et} \quad P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$$
.

Exercice 7 : Fonctions vectorielles

Calculer les dérivées partielles premières des fonctions suivantes :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ y^2 - z^2 \\ z^2 - x^2 \end{pmatrix}$$

Exercice 8 : Dérivées partielles de fonctions composées

1. On s'intéresse aux dérivées composées de fonctions d'une seule variable :
   (a) Calculer le vecteur vitesse au point $\vec{r}$ exprimé en coordonnées cylindriques.
   (b) Calculer son vecteur accélération.

2. Soit
$$u(x,y) = \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + 2\,\frac{y}{y_0}$$
avec $x(s,t) = s\,\sin\omega t$ et $y(s,t) = s\,\sin^2\omega t$. x_0, y_0 et ω sont des constantes.

   Calculer
$$\frac{\partial u}{\partial s} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}$$
.

3. T_0, r_0, ρ_0 et ω sont des constantes.
   (a) Soit
$$T(x(t),t) = T_0\,\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 \cos\omega t$$
   Calculer $\dfrac{dT}{dt}$ en fonction de $\dfrac{dx}{dt}$.

   (b) Soit
$$T(\vec{r}(t),t) = \frac{T_0}{r_0^2}\,(x^2 + 2\,y^2)\cos\omega t$$
   Calculer $\dfrac{dT}{dt}$ en fonction de $\dfrac{dx}{dt}$ et $\dfrac{dy}{dt}$.

   (c) Soit
$$T(\vec{r}(t),t) = \frac{T_0}{\rho_0^2}\,\rho^2\cos\theta\cos\omega t$$
   $\vec{r}$ étant défini à l'aide de ses coordonnées polaires ρ et θ.

   Calculer $\dfrac{dT}{dt}$ en fonction de $\dfrac{d\rho}{dt}$ et $\dfrac{d\theta}{dt}$.

Exercice 9 : Extrema de champs scalaires

1. Trouver les extrema de $f(x,y) = x\exp(-(x^2+y^2))$ et $g(x,y) = y/(a^2+x^2+y^2)$.
2. La fonction $h(x,y) = xy$ présente-t-elle un maximum ou un minimum ? Même question pour $l(x,y) = x^2y^2$.

Chapitre 5

Opérateurs différentiels

5.1 Opérateurs usuels

Exercice 1 : Gradients usuels

Soit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1. Calculer en utilisant les coordonnées cartésiennes $\mathbf{grad}\, r$, $-\mathbf{grad}(1/r)$, $-\mathbf{grad}(1/(a^2+r^2))$ et enfin $-\mathbf{grad}(\boldsymbol{p}.\boldsymbol{r}/r^3)$ où $\boldsymbol{p}$ est un vecteur constant.
2. Reprendre la question précédente en coordonnées sphériques.

Exercice 2 : Divergences usuelles

Calculer les divergences des champs de vecteurs suivants $\boldsymbol{r}$, $-\boldsymbol{r}/r^3$ et $\boldsymbol{r}/(a^2 + r^2)$ où a est une constante positive.

Exercice 3 : Champ scalaire

Soit le champ scalaire $J(\rho, \theta) = \exp(-\frac{\rho}{\rho_0} \cos\theta)$, ρ et θ étant des coordonnées polaires.

1. Calculer $\overrightarrow{\text{grad}}\, J(\rho, \theta) = \frac{\partial J}{\partial \rho}\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial J}{\partial \theta}\vec{u}_\theta$.
2. Calculer $\Delta J(\rho, \theta) = \frac{\partial^2 J}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial J}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 J}{\partial \theta^2}$.

Exercice 4 : Champs vectoriels

Soit $\boldsymbol{H}$ et $\boldsymbol{K}$ deux champs de vecteurs tels que

$$\boldsymbol{H}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - yz \\ y^2 - zx \\ z^2 - xy \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{K}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 + z^2 \\ z^2 + x^2 \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}.$$

Calculer div$\boldsymbol{H}$, $\mathbf{rot}(\boldsymbol{H})$, div$\boldsymbol{K}$, $\mathbf{rot}(\boldsymbol{K})$

Exercice 5 : Utilisations des opérateurs vectoriels

1. Soit la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Calculer le gradient et le laplacien en un point $\vec{r}$ en utilisant le système de coordonnées cartésiennes puis polaires. Conclusion.

2. Calculer le gradient de la fonction $f(\rho, \theta) = \rho^2 \tan\theta$ où ρ et θ sont les coordonnées polaires.

3. Montrer que la fonction $V(x,y,z) = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}$ vérifie l'équation de Laplace
$$\Delta V = 0$$
en tout point de l'espace excepté l'origine. Retrouver ce résultat en utilisant les coordonnées sphériques.

4. Calculer div $\vec{F}(r,\theta)$ avec $\vec{F}(r,\theta) = 2r^2 \sin\theta\ \vec{u}_r + r^2 \cos\phi\ \vec{u}_\theta$ exprimées à l'aide des coordonnées sphérique r, θ et ϕ.

5. Le champ de vitesse $\vec{v}(\vec{r})$ d'un solide en rotation autour d'un axe passant par l'origine et possédant une vitesse de rotation $\vec{\omega}$ constante, vaut $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$. Calculer $\overrightarrow{rot}\ \vec{v}(\vec{r})$ en prenant par exemple $\vec{\omega}$ suivant $\vec{e}_z$.

Exercice 6 : Interprétation des opérateurs div et $\overrightarrow{rot}$

1. Appliquer les opérateurs div et $\overrightarrow{rot}$ aux trois champs vectoriels suivant :
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v_1} &= \frac{v_0}{l_0}(x\ \overrightarrow{u_x} + y\ \overrightarrow{u_y} + z\ \overrightarrow{u_z}) \\
\overrightarrow{v_2} &= \frac{v_0}{l_0} y\ \overrightarrow{u_x} \\
\overrightarrow{v_3} &= v(\rho)\ \overrightarrow{u_\theta}
\end{aligned}$$
exprimé en coordonnées polaires, dans la base polaire.

2. Interpréter vos résultats en vous aidant des représentations de ces champs dessinés sur la Figure 5.1.

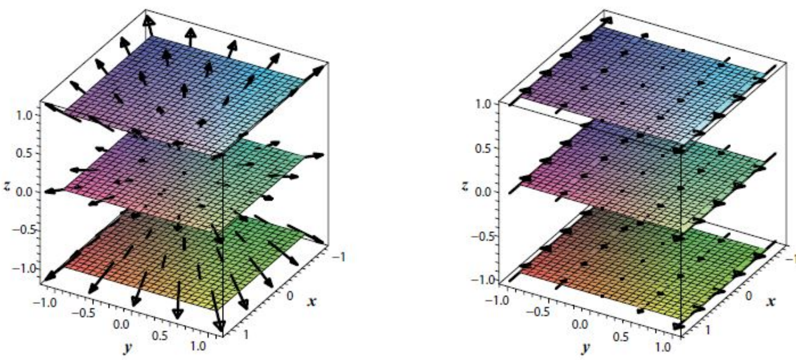

FIGURE 5.1 – Champ de vecteurs $\mathbf{v_1}(M)$ à gauche et $\mathbf{v_2}(M)$ à droite. Le vecteur est appliqué au point M, milieu de la flèche.

5.2 Identités vectorielles

Exercice 7 : Egalités vectorielles

Retrouver les égalités suivantes :
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right) &= \overrightarrow{0}, \\
\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\right) &= 0, \\
\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\right) &= \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}) - \overrightarrow{\triangle}
\end{aligned}$$

Exercice 8 : Manipuler les identités vectorielles

Soient $\Phi(x,y,z)$ un champ scalaire et, $\overrightarrow{A}(x,y,z)$ et $\overrightarrow{B}(x,y,z)$ deux champs vectoriels suffisamment réguliers.

1. Rayer dans la liste suivante les expressions qui n'ont pas de sens : $\overrightarrow{grad}\Phi$, $\overrightarrow{grad}(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B})$, $div\Phi$, $div\overrightarrow{A}$, $div(\overrightarrow{grad}\Phi)$, $div(\overrightarrow{A}\times\overrightarrow{B})$, $\overrightarrow{rot}\Phi$, $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\Phi)$, $div(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{A})$, $div(\Phi\overrightarrow{A})$, $\overrightarrow{rot}(\Phi\overrightarrow{A})$.
2. Six des expressions restantes peuvent s'identifier avec une des expressions listées ci-dessous : 0, $\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{rot}\overrightarrow{A}-\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{rot}\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{grad}\Phi+\Phi div\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{grad}\Phi\times\overrightarrow{A}+\Phi\overrightarrow{rot}\overrightarrow{A}$, $\Delta\Phi$.
   Donner, sans calcul, les relations qui en découlent.

5.3 Un exemple en électromagnétisme : les équations de Maxwell

Exercice 9 : Un peu d'électromagnétisme

On rappelle que les équations de Maxwell pour les champs électrique $\overrightarrow{E}$ et magnétique $\overrightarrow{B}$ s'écrivent

$$\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r},t)=\frac{\rho(\overrightarrow{r},t)}{\varepsilon_0}\quad,\quad\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r},t)=-\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}(\overrightarrow{r},t)$$

$$\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{B}(\overrightarrow{r},t)=0\quad,\quad\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{B}(\overrightarrow{r},t)=\mu_0\left(\overrightarrow{j}(\overrightarrow{r},t)+\varepsilon_0\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}(\overrightarrow{r},t)\right)$$

1. Soit $\Box=\overrightarrow{\triangle}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$. Calculer $\Box\overrightarrow{E}$ et $\Box\overrightarrow{B}$ en s'aidant de la relation :

$$\overrightarrow{\nabla}\wedge\left(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{A}\right)=\overrightarrow{\nabla}\left(\overrightarrow{\nabla}\cdot\overrightarrow{A}\right)-\overrightarrow{\triangle}\overrightarrow{A}$$

2. Soit le vecteur de Poynting défini par $\overrightarrow{\mathcal{P}}=\frac{1}{\mu_0}\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B}$. Calculer $\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{\mathcal{P}}$ à l'aide de la relation :

$$\overrightarrow{\nabla}\cdot\left(\overrightarrow{A}\wedge\overrightarrow{B}\right)=\overrightarrow{B}\cdot\left(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{A}\right)-\overrightarrow{A}\cdot\left(\overrightarrow{\nabla}\wedge\overrightarrow{B}\right)\;,$$

3. Sachant que la puissance électromagnétique qui traverse une surface (S) fermée est

$$\Pi=\iint_S\overrightarrow{\mathcal{P}}.\overrightarrow{dS}$$

   interpréter le résultat précédent.

Exercice 10 : Ondes planes

1. Calculer la divergence, le rotationnel et le laplacien d'une onde vectorielle harmonique plane :

$$\boldsymbol{A}(M)=\boldsymbol{A}_0\exp(i(\omega t-\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}))$$

   où ω est une constante, $\boldsymbol{A}_0$ et $\boldsymbol{k}$ des vecteurs constants.
2. Montrer que $\boldsymbol{A}$ vérifie l'équation d'onde $\partial^2_{tt}\boldsymbol{A}-c^2\Delta\boldsymbol{A}=0$ si et seulement si ω et $\boldsymbol{k}$ vérifie une relation qu'on précisera.

3. Calculer le laplacien d'une onde scalaire sphérique

$$p(M) = (q_0/r)\exp(i(\omega t - k.r))$$

où r, ω, k et q_0 sont des scalaires. On rappelle que le laplacien d'une fonction $f(r)$ ne dépendant que de la distance r s'écrit

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right)$$

4. En déduire que p vérifie l'équation $\partial^2_{tt}p - c^2\Delta p = 0$ si et seulement si ω et k vérifient une relation que l'on précisera.

Chapitre 6

Théorèmes de Green-Ostrogradski et de Stokes

6.1 Intégrales doubles et intégrales triples

Exercice 1 : Calcul d'intégrales multiples

1. Calculer à l'aide d'une intégrale de surface l'aire d'un triangle OAB où les coordonnées des point O, A et B sont respectivement $(0,0)$, $(a,0)$ et $(0,b)$. Pour cela, on devra déterminer l'équation de la droite AB. Vérifier votre résultat à l'aide de la formule usuelle donnant l'aide d'un triangle.
2. Ecrire à l'aide d'une intégrale de surface l'aire du quart de disque de rayon R et de centre O situé dans le premier quadrant du plan Oxy. Montrer quelle est égale à

$$\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\mathrm{d}x.$$

Calculer cette intégrale en faisant le changement de variable $x = R\cos\phi$. Retrouver le résultat en faisant le calcul en coordonnées cylindriques. Vérifier votre résultat à l'aide de la formule usuelle donnait l'aire d'un disque.

Exercice 2 : Périmètre, surface et volume

1. Coordonnées polaires
   (a) Retrouver par intégration le périmètre du cercle de rayon R, situé dans le plan $(0yz)$, centré en $(0,1,1)$.
   (b) Retrouver par intégration la surface d'un demi-disque de rayon R.

2. Coordonnées cylindriques
   (a) Donner, sans calcul, la surface latérale et le volume d'un cylindre circulaire droit de hauteur H et de rayon R.
   (b) Calculer, à l'aide d'une intégrale, la surface latérale de ce cylindre.
   (c) Calculer, à l'aide d'une intégrale, le volume du cylindre.

3. Coordonnées sphériques
   (a) Calculer, à l'aide d'une intégrale, la surface d'une demi-sphère de rayon R.
   (b) Calculer, à l'aide d'une intégrale, le volume d'un quart de sphère de rayon R.

6.2 Théorèmes de Green-Ostrogradski et de Stokes

Exercice 3 : Calcul de flux

Calculer le flux de

$$\vec{F} = 4xy\,\vec{e}_x - y^2\,\vec{e}_y + yz\,\vec{e}_z$$

à travers la surface du cube délimité par $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ et $0 \leq z \leq 1$:
- par un calcul direct
- en utilisant le théorème de Green-Ostrogradsky.

Exercice 4 : Calcul de circulation

Soit le champ de vecteur

$$\boldsymbol{A} = (y - z)\boldsymbol{i} + (z - x)\boldsymbol{j} + (x - y)\boldsymbol{k}$$

Calculer la circulation de $\boldsymbol{A}$ le long du cercle $\mathcal{C}$ d'équations

$$\mathcal{C} : (x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 1)$$

en utilisant le théorème de Stokes.

Exercice 5 : Circulation et flux sur un cylindre

On considère un champ vectoriel

$$\vec{F} = y\vec{e}_x - x\vec{e}_y + r_0\vec{e}_z$$

où r_0 est constant.

1. Exprimer ce champ en coordonnées cylindriques. Pour répondre aux questions suivantes, on utilisera de préférence ce système de coordonnées.
2. Calculer la valeur de la circulation de ce vecteur sur un cercle parallèle au plan $(0xy)$, de rayon R, centré sur l'axe des z, à une hauteur $h > 0$ et d'orientation donnée par le sens $\vec{e}_z$, en utilisant :
   - une intégrale simple
   - une intégrale double
3. Calculer la valeur du flux de ce champ à travers la surface fermée d'un cylindre centré sur l'axe des z, de rayon R et de hauteur comprise entre 0 et $h > 0$ en utilisant :
   - une intégrale double
   - une intégrale triple

Exercice 6 : Champ irrotationnel

Soit le champ vectoriel

$$\vec{A} = \frac{-y\,\vec{e}_x + x\,\vec{e}_y}{x^2 + y^2}$$

où $(x, y) \in \mathbb{R}^{*2}$.

1. Montrer que ce champ est irrotationnel.
2. Peut-on prédire la valeur de

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

   lorsque $\mathcal{C}$ est le cercle dans le plan (Oxy), de rayon R et centré sur l'origine ?
3. Calculer cette circulation.

Exercice 7 : Formules de Green

Utiliser la relation vectorielle

$$\vec{\nabla}\,.\,\left(u\,\vec{\nabla}\,v\right) = u\,\triangle v + \left(\vec{\nabla}u\right)\,.\,\left(\vec{\nabla}v\right),$$

et le théorème de Green-Ostrogradski, pour obtenir les 2 formules de Green

$$\begin{aligned}
\int_V \left[u\,\triangle v + \left(\vec{\nabla}u\right)\,.\,\left(\vec{\nabla}v\right)\right] dV &= \oint_S u\,\vec{\nabla}\,v\,.\,\overrightarrow{dS} \\
\int_V \left(u\,\triangle v - v\,\triangle u\right) dV &= \oint_S \left(u\,\vec{\nabla}v - v\,\vec{\nabla}u\right).\,\overrightarrow{dS}
\end{aligned}$$

où u et v sont deux champs scalaires suffisamment réguliers. S désigne la surface limitant le volume V et les flux sont considérés comme sortant.

6.3 Un exemple en électrostatique et en mécanique quantique

Exercice 8 : Le dipôle électrique

Un dipôle électrique de moment dipolaire de norme $p = 2aq$, placé à l'origine, crée en tout point M de l'espace ($||\overrightarrow{OM}|| = r \gg a$) un potentiel approché

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\overrightarrow{p}\,.\,\overrightarrow{r}}{r^3}$$

1. Calculer l'expression, en coordonnées sphériques, du champ électrique dans le plan $\mathcal{P}$ $(O, \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_z)$ créé par le dipôle orienté suivant $\overrightarrow{u}_z$.
2. Calculer la divergence de ce champ en M. Comparer le résultat obtenu à celui donné par la loi locale du champ électrique

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}$$

   où ρ est la densité de charge en M.
3. Appliquer le résultat précédent au calcul du flux de $\overrightarrow{E}$ à travers une portion de tube de champ (tube dont les parois sont colinéaires au champ).
4. En déduire la propriété très générale associée à une divergence nulle : là où les lignes de champ se resserrent, l'intensité moyenne du champ augmente.
5. Calculer le rotationnel de ce champ en M. Interpréter ce résultat en terme de circulation de $\overrightarrow{E}$ autour du voisinage de ce point.

Exercice 9 : Équation de Schrödinger

Une particule quantique de masse m, placée dans un potentiel $V(\overrightarrow{r})$ (réel), est décrite par une fonction d'onde $\psi(\overrightarrow{r}, t)$ qui obéit à l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\triangle\psi(\overrightarrow{r}, t) + V(\overrightarrow{r})\psi(\overrightarrow{r}, t) = i\hbar\frac{\partial\psi(\overrightarrow{r}, t)}{\partial t}$$

Dans cette équation $\psi(\overrightarrow{r}, t) \in \mathbb{C}$.

1. Soient f et g deux champs scalaires, démontrer la relation

$$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{\nabla}g\right) = f\Delta g + \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\left(\vec{\nabla}g\right)$$

2. On note $\overline{\psi(\overrightarrow{r},t)}$ le complexe conjugué de $\psi(\overrightarrow{r},t)$. Établir à quelle équation de Schrödinger obéit $\overline{\psi(\overrightarrow{r},t)}$.
3. En utilisant ce résultat, montrer que l'on a :

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi|^2 = \frac{i\hbar}{2m}\ \left(\overline{\psi}\ \triangle\psi - \psi\ \triangle\ \overline{\psi}\right)$$

4. On introduit le courant de probabilité

$$\overrightarrow{J}(\overrightarrow{r},t) = \frac{i\hbar}{2m}\ \left(\psi\ \overrightarrow{\nabla}\overline{\psi} - \overline{\psi}\ \overrightarrow{\nabla}\psi\right)$$

   Établir l'équation de conservation de la densité de probabilité $|\psi|^2$

$$\frac{\partial}{\partial t}\ |\psi|^2 + \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{J} = 0$$

5. Soit un volume fixe V délimité par une surface (S), démontrer que

$$\int_S \overrightarrow{J}(\overrightarrow{r},t).\overrightarrow{dS} = -\frac{d}{dt}\int_V |\psi|^2 d\tau$$

   Interpréter.
6. On suppose que ψ a la forme d'une onde plane, soit

$$\psi(\overrightarrow{r},t) = e^{i(\overrightarrow{k}.\overrightarrow{r}-\omega t)}$$

   Montrer que la densité de courant de probabilité $\overrightarrow{J}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{J}(\overrightarrow{r},t) = \frac{\hbar\overrightarrow{k}}{m}\ |\psi|^2$$

   Trouver la dimension de $\hbar k/m$ par un argument dimensionnel.