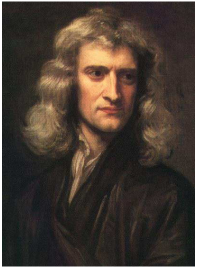
Autour de la stabilité du Système Solaire

François Béguin

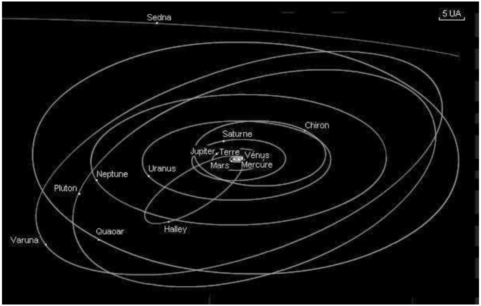
(Laboratoire de Mathématiques)



- *L'accélération d'un corps est proportionnelle à la résultante des forces qu'il subit, et inversement proportionnelle à sa masse.*
- *Deux corps quelconques exercent l'un sur l'autre une force d'attraction proportionnelle au produit de leurs masses, et à l'inverse du carré de leur distance.*

« **Scholie.** *Donc les planètes majeures tournent sur des ellipses ayant leur foyer au centre du Soleil [...] comme Kepler l'a supposé.* »

(*De motu corporum in gyrum*, 1684)



Ce résultat ne tient compte que de l'attraction que le Soleil exerce sur chaque planète, pas des attractions mutuelles des planètes !

Que se passe-t-il quand on tient compte de ces attractions mutuelles ?

« L'attraction de Jupiter, à distance égale, est mille fois plus petite que celle du Soleil ; la force perturbatrice est donc petite, et cependant, si elle agissait toujours dans le même sens elle ne tarderait pas à produire des effets appréciables. »

(Poincaré)

« Un destin aveugle ne pourrait jamais faire mouvoir ainsi toutes les planètes, à quelques inégalités près à peine remarquables, qui peuvent provenir de l'action mutuelle des planètes et des comètes, et qui probablement deviendront plus grandes par une longue suite de temps jusqu'à ce qu'enfin ce système ait besoin d'être remis en ordre par son auteur. »

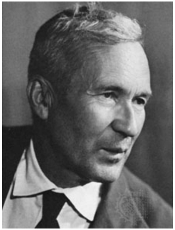
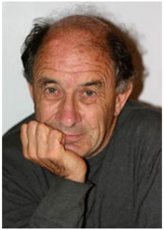
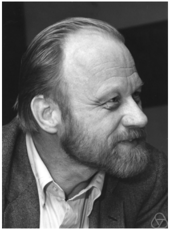
I. Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, 1687

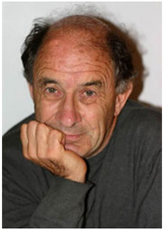
Théorème (Laplace, Lagrange, $\approx$ 1780).
Le Système Solaire est stable si, dans les forces d'attractions mutuelles des planètes, on ne tient compte que des termes d'ordre 1 en fonction du rapport $\dfrac{\textit{masses planètes}}{\textit{masse Soleil}}$.

En pratique, ceci assure la stabilité du Système Solaire pour un temps de l'ordre du million d'années.

Poincaré, 1890
Découverte du mécanisme mathématique qui conduit à des systèmes “chaotiques” (les intersections homoclines). La découverte de Poincaré semble indiquer que le Système Solaire “a toutes les chances” d'être chaotique.

Théorème KAM (Kolmogorov, Arnold, Moser, $\sim$ 1960)
Pour une petite perturbation d'un système hamiltonien totalement intégrable générique, la plupart des orbites sont quasi-périodiques et proches de celles du système non-perturbé.

Corollaire (Arnol'd, Hermann, $\sim$ 2000)

Pour un "système solaire" avec des planètes de masses suffisamment petites, la plupart des positions et vitesses initiales des planètes donnent lieu à des orbites quasi-périodiques, proches ellipses képleriennes.

Quel est le sens précis du terme "*perturbation*" ?

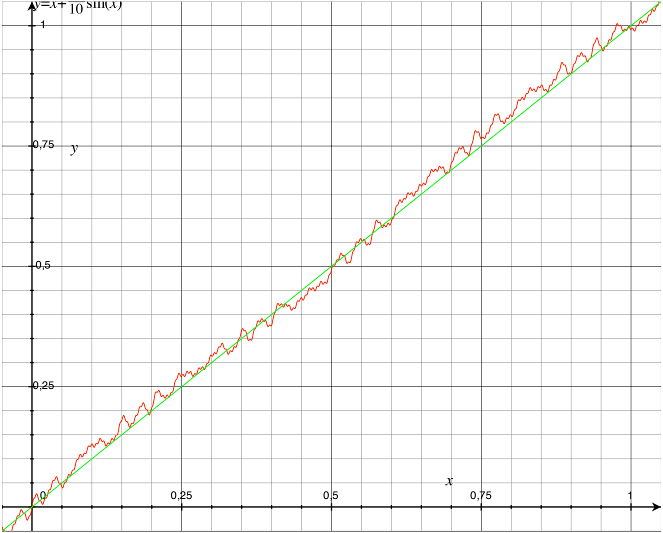
Définition. Une C^r*-perturbation* d'un système gouverné par une équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = F(x)$$

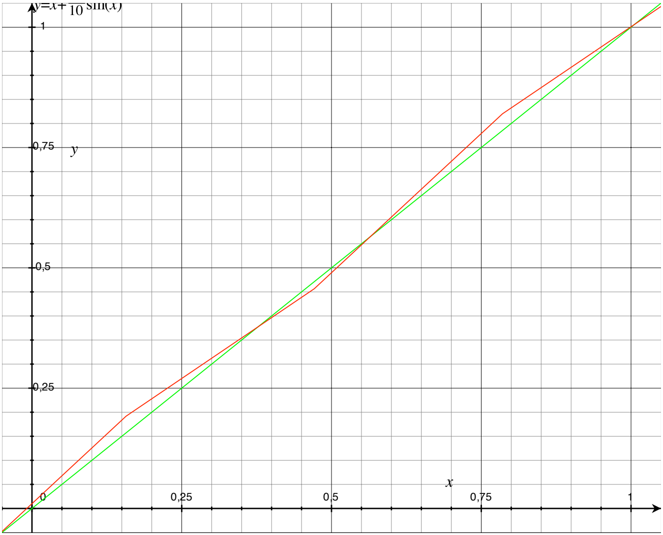
est un système gouverné par une équation différentielle du type

$$\frac{dx}{dt} = F(x) + f(x)$$

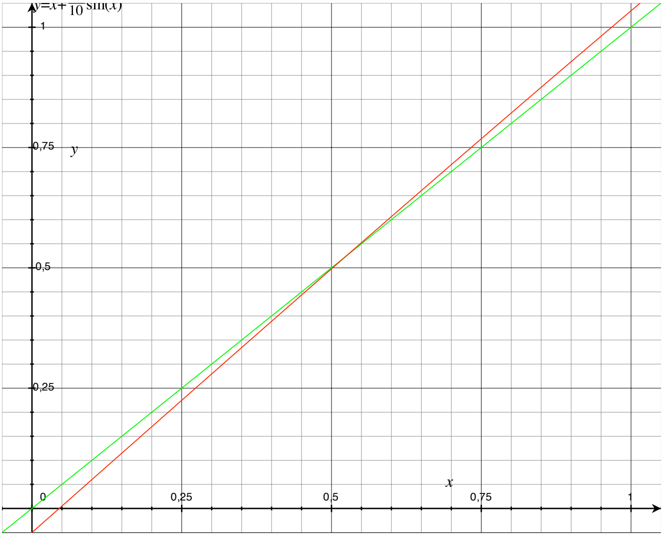
où la fonction f est petite ainsi que ses r premires drives.



Une perturbation C^0-petite



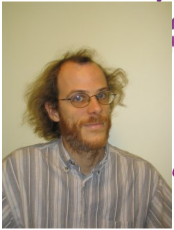
Une perturbation C^1-petite.



Une perturbation C^4-petite.

Dans le théorème KAM, il s'agit de perturbations C^4-petites.

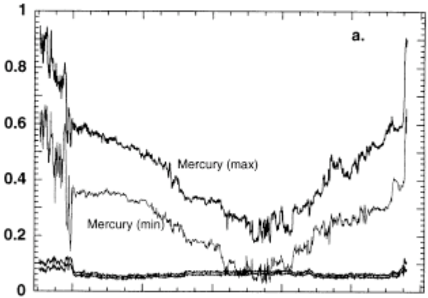




Théorème (Arnaud, Bonatti, Crovisier, 2002) *Pour la plupart des perturbations C^1-petites d'un système hamiltonien, la plupart des orbites sont denses dans l'espace des phases (en particulier, ne sont pas bornées)*

Calcul numérique (Laskar, 1989)

L'évolution des planètes intérieures est sensibles aux conditions initiales : une erreur de 15 mètres dans la position actuelle de la Terre peut conduire, en théorie, à une erreur de 150 millions de kilomètres pour sa position calculée dans 100 millions d'années.



Crédit : J. Laskar - IMCCE

Calcul numérique (Laskar, 1994)

L'évolution possible (en fonction d'infimes variations des conditions initiales) de l'excentricité de Mercure autorise une éjection de cette planète du Système Solaire dans 3,5 milliards d'années.