

BASES DE LA COSMOLOGIE MODERNE

NOTES PRELIMINAIRES : Cours 8 et 9 sur l'Univers perturbé

Master 2 NPAC

Mathieu Langer & Hervé Dole

Notes de cours de

Hervé Dole

Institut d'Astrophysique Spatiale

bureau 206 - bâtiment 121

Université Paris Sud 11

91405 Orsay Cedex

tel : 01.69.85.85.72

email : Herve.Dole+ias.u-psud

remplacer le "+" par "@" et rajouter ".fr" à la fin

Document remis à jour chaque année et téléchargeable sur :
<http://www.ias.u-psud.fr/pperso/hdole/enseignement.php>

Ce cours de 10 séances de 3 heures est préparé et donné par
Michael Joyce, Mathieu Langer et Hervé Dole.

Année 2007-2008

Table des matières

1	L'Univers perturbé : du P(k) aux galaxies	7
1.1	Fonction de corrélation des galaxies et biais	7
1.1.1	Introduction : enjeux	7
1.1.2	Fonction de corrélation	7
1.1.3	P(k) et Fonction de corrélation à 2 points	9
1.1.4	Fonction de corrélation angulaire	11
1.1.5	Biais galaxie-matière	14
1.2	Contraintes Observationnelles	14
1.2.1	Relevés de galaxies	14
1.2.2	Oscillations baryoniques	15
1.2.3	Rayonnement de fond extragalactique	16
1.2.4	Simulations	18
1.2.5	le monde merveilleux des galaxies	18
1.3	Bibliographie spécifique à ce chapitre	19
2	L'Univers perturbé : Fond Diffus Cosmologique	21
2.1	Spectre de puissance des fluctuations sur la sphère : C_l	21
2.1.1	Rappels sur le spectre de puissance	21
2.1.2	Spectre de puissance sur la sphère : C_l	22
2.1.3	A quoi correspond l ?	24
2.1.4	Le spectre de puissance des anisotropies de températures du CMB : description	26
2.1.5	Polarisation du CMB	26
2.2	Observations du fond diffus cosmologique	26
2.2.1	Mesures : T, spectre et fluctuations	26
2.2.2	Stratégies et difficultés	26
2.2.3	Polarisation	27
2.2.4	Qu'apportent toutes ces observations ?	27
2.3	C_l et paramètres cosmologiques	27
2.3.1	C_l et détermination des paramètres cosmologiques	27
2.3.2	CMBEasy	27
2.3.3	Dégénérescences des paramètres cosmologiques	27
2.3.4	Avant-plans ; réionisation	27
2.4	Au delà de la température du CMB : polarisation et autres contraintes	27
2.4.1	Polarisation ; fluctuations en T, E, B	27
2.4.2	Combinaison avec d'autres observations : SN, amas	28
2.5	Bibliographie	28
3	Fond diffus cosmologique pour L2 : quelques notes	31
3.1	Contexte	31
3.2	Historique de la détection du CMB	31
	Bibliographie	32

Table des figures

1.1	Principales structures visibles de l'Univers , avec leurs masses, tailles et contrastes de densité caractéristiques. Tiré du cours de Y. Mellier, p37.	8
1.2	Illustration du passage de 3D à 2D dans les fonctions de corrélation à 2 points. a) vue à 3D. b) projection à 2D.	11
1.3	Le relevé photométrique APM (Maddox et al., 1990). Grâce aux 2 millions de galaxies observées en bleu ($b_j > 20.5$) sur 4300 degrés carrés, la fonction de corrélation angulaire à 2 points a été mesurée pour la première fois sur ces échelles. L'image représente un rectangle d'environ 55×80 degrés carrés. On la mesure maintenant sur tout le ciel (IRAS ou 2MASS en infrarouge) ou sur une fraction plus grande (par exemple 8000 degrés carrés pour le SDSS).	12
1.4	Evolution de la longueur de corrélation r_0 par Overzier et al. (2003).	13
1.5	Théorie des pics (tiré de Peacock) : les amas se forment au dessus d'un certain seuil de fluctuation Meneux et al. (2006).	15
1.6	Mesure du biais dans le VVDS pour $0 < z < 1.5$ par Marinoni et al. (2005).	15
1.7	Les contributions majeures en rayonnement dans l'Univers : le fond cosmologique (CMB) et le fond diffus extragalactique, qui s'étend du domaine radio aux rayons γ . Ce graphique représente la brillance du rayonnement extragalactique et cosmologique, qui est proportionnelle à la puissance recue, en fonction de la longueur d'onde (ou énergie) d'observation (Dole et al. (2006) et Dole, in prep ; voir le site web galaxies IR à l'IAS).	16
1.8	Le fond diffus extragalactique dans le domaine spectral s'étendant de l'UV au submillimétrique. Le FDE est dominé en énergie par l'infrarouge. Comme pour la figure 1.7, la brillance est tracée en fonction de la longueur d'onde (ou énergie) d'observation (adapté de Dole et al., 2006)	17
1.9	Spectre simulé d'une étoile de population III (Santos et al., 2002)	18
1.10	Illustration grand public de la découverte de fluctuations dans le fond diffus extragalactique proche-IR par Spitzer. Kashlinsky et al. (2007a) ont détecté ces fluctuations et les interprètent comme la signature des premières étoiles (population III). Illustration NASA/SSC.	18
2.1	Carte du ciel des anisotropies de température du CMB. En haut à gauche : tous les l ; ensuite, pour les 8 premiers l . Tiré de Hinshaw et al. (2006)	23
2.2	Illustration de la distance angulaire D_A en fonction de la géométrie. Tiré de Hu et al. (1997).	25
2.3	Evolution de D_A en fonction du redshift (et de la cosmologie). Tiré de Hogg (2000).	25
2.4	Illustration des 3 régimes dans le spectre de puissance des fluctuations de température du CMB C_l. Le plateau, les pics acoustiques, l'amortissement. En insert, image des fluctuations observées en 1999 par le ballon BOOMERANG (De Bernardis et al., 2000) : on voit que l'essentiel de l'énergie se trouve dans des fluctuations aux échelles assez petites (~ 1 degré), ce qui explique le 1er pic acoustique vers $l \sim 200$ correspondant à une angle de 1 degré. (adapté de S. Bridle).	26
2.5	Illustration des spectres de puissance TT (haut), EE (milieu) et TE (bas) (Balbi et al., 2006). Remarquer le déphasage de π entre TT et EE, et de $\pi/2$ avec TE.	27
2.6	Spectres de puissance mesurés par WMAP 3 (Page et al., 2006). De haut en bas : TT, TE, EE, et valeur supérieure sur BB.	28
2.7	Estimation de τ par WMAP 1 et 3 (Page et al., 2006). Constaté l'évolution de l'estimation entre WMAP1 et WMAP3. La valeur actuelle se situe autour de $\tau \sim 0.10$. Les premières estimations de $\tau \sim 0.17$ laissèrent sceptiques beaucoup de chercheurs.	29

Chapitre 1

L'Univers perturbé : du $P(k)$ aux galaxies

Sommaire

1.1	Fonction de corrélation des galaxies et biais	7
1.1.1	Introduction : enjeux	7
1.1.2	Fonction de corrélation	7
1.1.3	$P(k)$ et Fonction de corrélation à 2 points	9
1.1.4	Fonction de corrélation angulaire	11
1.1.5	Biais galaxie-matière	14
1.2	Contraintes Observationnelles	14
1.2.1	Relevés de galaxies	14
1.2.2	Oscillations baryoniques	15
1.2.3	Rayonnement de fond extragalactique	16
1.2.4	Simulations	18
1.2.5	le monde merveilleux des galaxies	18
1.3	Bibliographie spécifique à ce chapitre	19

1.1 Fonction de corrélation des galaxies et biais

1.1.1 Introduction : enjeux

Les propriétés globales de l'Univers se rapprochent de l'homogénéité, mais les observations montrent une grande variété de structures, de l'échelle des galaxies jusqu'à des échelles de dizaines de Mpc. L'existence de ces structures cosmologiques peuvent nous renseigner sur les conditions initiales du Big Bang et sur les processus physiques qui se sont déroulés ensuite, en particulier ceux qui ont abouti à obtenir une densité non-uniforme comme on l'observe.

L'enjeu consiste donc à établir une théorie de la croissance des perturbations linéaires, puis d'effectuer des simulations pour quantifier les effets non-linéaires de la gravitation, et de comparer avec les observations des objets ou structures existantes qui ont subi tout ou partie de ces processus. Il importe donc de bien caractériser cette *structuration de la matière* (clustering) dans l'Univers.

Cette section s'intéresse aux relations entre le spectre de puissance des fluctuations de densité $P(k)$ et les observables, comme la fonction de corrélation des galaxies. On verra que le lien entre les deux n'est pas trivial, alors qu'il est essentiel pour la cosmologie moderne afin de comparer les prédictions théoriques aux observations.

1.1.2 Fonction de corrélation

■ La **fonction de corrélation à deux points des galaxies** est la description la plus simple de la distribution des galaxies à grande échelle. La fonction de corrélation à 2 points quantifie l'excès de probabilité de trouver une galaxie 2 à une distance r d'une galaxie 1 sélectionnée au hasard, par rapport à une distribution moyenne uniforme.

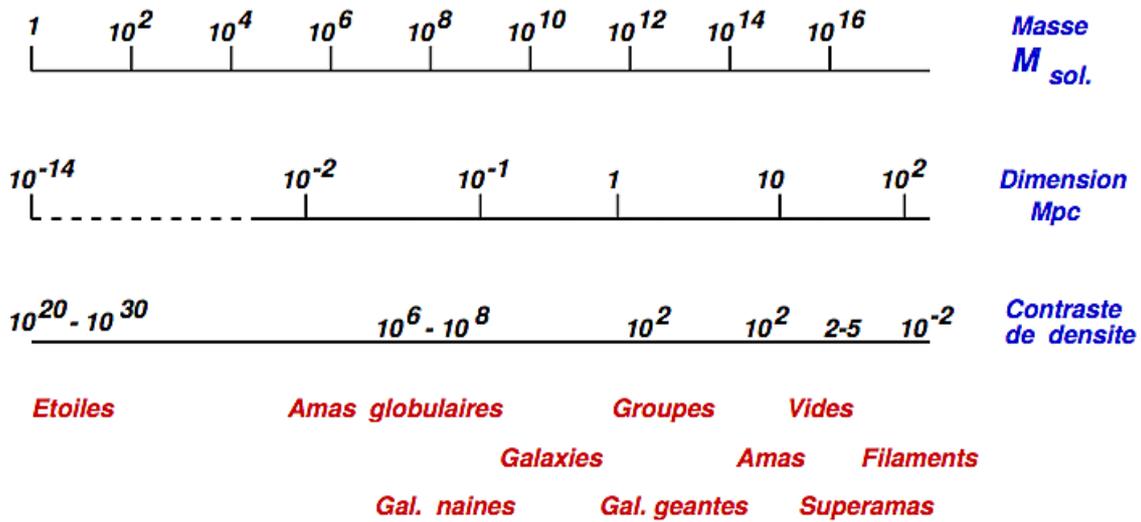


FIG. 1.1 – Principales structures visibles de l'Univers, avec leurs masses, tailles et contrastes de densité caractéristiques. Tiré du cours de Y. Mellier, p37.

Par exemple, si les galaxies sont distribuées au hasard selon la statistique de Poisson, avec une densité moyenne ρ_0 , la probabilité $dN(r)$ de trouver une galaxie dans le volume dV_2 à une distance r de la galaxie 1 dans le volume dV_1 est :

$$dN(r) = \rho_0^2 dV_1 dV_2 \quad (1.1)$$

Par distribution poissonnienne on entend (Peebles, p213) processus aléatoire stationnaire (propriétés moyennes identiques quel que soit l'endroit et la taille de l'échantillon considéré), i.e. les galaxies sont placées au hasard et indépendamment les unes des autres, avec une probabilité spatiale homogène. Autrement dit, le spectre de puissance d'une telle distribution est plat : c'est celui d'un bruit blanc.

Si la distribution des galaxies s'écarte un peu d'une distribution poissonnienne, cette probabilité sera :

$$dN(\vec{x}, \vec{r}) = \rho_0^2 (1 + \xi(\vec{r})) dV_1 dV_2 \quad (1.2)$$

où $\xi(\vec{r})$ est la fonction de corrélation des galaxies à 2 points. On utilise \vec{r} et pas r car on ne fait pas encore d'hypothèse sur l'isotropie de la distribution.

[plus simple : $dN = \rho_0 dV$ sans clustering ; $dN(r) = \rho_0(1 + \xi(r))dV$ avec clustering]

■ Commentaires

- $\xi(r) > 0$ indique une surdensité de galaxies par rapport à la densité moyenne à l'échelle r
- $\xi(r) = 0$ indique une densité de galaxies égale à la densité moyenne
- $\xi(r) < 0$ indique une sousdensité de galaxies par rapport à la densité moyenne

■ La probabilité de trouver une galaxie à une distance r d'une autre (Eq. 1.2) peut se réécrire en faisant intervenir la densité autour de chaque boîte, séparée de r :

$$dN(\vec{x}, \vec{r}) = \rho(\vec{x}) dV_1 \rho(\vec{x} + \vec{r}) dV_2 \quad (1.3)$$

En égalisant les Eq. 1.2 et 1.3, on va voir que :

1- la fonction de corrélation à 2 points donne la fonction d'autocorrélation de la distribution de matière, et que

2- la fonction de corrélation à 2 points permet de reconstruire le spectre de puissance du champ de densité.

[ce qui suit est démontré dans le Longair page 308, et dans le Mellier page 35]

■ Introduisons le **contraste de densité** $\Delta(x)$, quantité sans dimension qui relie la densité $\rho(x)$ au point x à la densité moyenne du milieu ρ_0 (voir Fig. 1.1) :

$$\Delta(\vec{x}) \equiv \frac{\rho(\vec{x})}{\rho_0} - 1 \quad (1.4)$$

ce qui donne de manière équivalente :

$$\rho(\vec{x}) = \rho_0(1 + \Delta(\vec{x})) \quad (1.5)$$

En insérant cette expression dans la fonction de corrélation de l'Eq. 1.3, nous obtenons :

$$dN(\vec{x}, \vec{r}) = \rho_0^2 [1 + \Delta(\vec{x})][1 + \Delta(\vec{x} + \vec{r})] dV_1 dV_2 \quad (1.6)$$

En moyennant sur un volume suffisamment grand et dans toutes les directions \vec{x} , $\langle \Delta \rangle = 0$, i.e.

$\langle \Delta(\vec{x}) \rangle = \langle \Delta(\vec{x} + \vec{r}) \rangle = 0$, ce qui ne laisse que le terme croisé (autrement dit, on ne garde que les termes du 2nd ordre) :

$$dN(\vec{r}) = \rho_0^2 [1 + \langle \Delta(\vec{x})\Delta(\vec{x} + \vec{r}) \rangle] dV_1 dV_2 \quad (1.7)$$

En comparant cette équation avec l'Eq. 1.2 on voit que la fonction de corrélation s'exprime directement en fonction du contraste de densité :

$$\xi(\vec{r}) = \langle \Delta(\vec{x})\Delta(\vec{x} + \vec{r}) \rangle \quad (1.8)$$

La fonction de corrélation à 2 points est aussi la **fonction d'autocorrélation de la distribution de matière**.

■ Commentaires

- On a fait l'hypothèse implicite dans l'Eq. 1.3 que la matière visible trace parfaitement la matière noire.
- La fc2p est un outil puissant pour sonder les variations de densité

1.1.3 P(k) et Fonction de corrélation à 2 points

■ Allons plus loin. Plaçons-nous dans un (grand) volume V d'espace. Prenons la TF de $\Delta(\vec{r})$ (Eq. 1.8) :

$$\begin{cases} \Delta(\vec{r}) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int \tilde{\Delta}(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3 k \\ \tilde{\Delta}(\vec{k}) = \frac{1}{V} \int \Delta(\vec{r}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3 r \end{cases} \quad (1.9)$$

Puisque $\Delta(\vec{r})$ est une fonction réelle, elle est égale à son complexe conjugué :

$$\Delta^*(\vec{r}) = \Delta(\vec{r}) \quad (1.10)$$

On peut donc réécrire l'Eq. 1.8 de la manière suivante :

$$\xi(\vec{r}) = \langle \Delta^*(\vec{x})\Delta(\vec{x} + \vec{r}) \rangle \quad (1.11)$$

[à faire faire en exercice]

En remplaçant $\Delta(\vec{r})$ par sa TF (Eq. 1.9), on obtient :

$$\xi(\vec{r}) = \langle \left(\frac{V}{2\pi^3} \int \tilde{\Delta}^*(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3 k \right) \cdot \left(\frac{V}{2\pi^3} \int \tilde{\Delta}(\vec{k}') e^{-i\vec{k}' \cdot (\vec{x} + \vec{r})} d^3 k' \right) \rangle \quad (1.12)$$

Soit, en recombinaison :

$$\xi(\vec{r}) = \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3 k \int d^3 k' e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{r}} e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{x}} \langle \tilde{\Delta}^*(\vec{k}) \tilde{\Delta}(\vec{k}') \rangle \quad (1.13)$$

Or :

$$\langle \tilde{\Delta}^*(\vec{k}) \tilde{\Delta}(\vec{k}') \rangle = \delta(\vec{k} - \vec{k}') |\tilde{\Delta}(\vec{k})|^2 \quad (1.14)$$

puisque le membre de droite fait intervenir l'intégrale sur $e^{i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r}}$ qui est non-nulle seulement pour $k = k'$.

En remplaçant dans l'intégrale avec $k = k'$, l'une des deux intégrales donne le volume total, soit $\frac{(2\pi)^3}{V}$, ce qui donne finalement :

$$\xi(\vec{r}) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 k e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} |\tilde{\Delta}(\vec{k})|^2 \quad (1.15)$$

On a par ailleurs la définition du $P(k)$, le spectre de puissance des fluctuations de densité de matière :

$$|\tilde{\Delta}(\vec{k})|^2 \equiv P(\vec{k}) \quad (1.16)$$

ce qui au final nous donne :

$$\xi(\vec{r}) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int P(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3 \vec{k} \quad (1.17)$$

la fonction de corrélation $\xi(r)$ est la transformée de Fourier du spectre de puissance $P(k)$.

■ Si le problème est à symétrie sphérique (i.e. isotrope et homogène), les variables vectorielles deviennent réelles par symétrie :

$$\begin{cases} \xi(\vec{r}) = \xi(r) \\ P(\vec{k}) = P(k) \end{cases} \quad (1.18)$$

L'Eq. 1.17 devient :

$$\xi(r) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int k^2 dk P(k) \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta e^{-i.k.r. \cos \theta} \quad (1.19)$$

$$\xi(r) = \frac{V}{(2\pi)^2} \int k^2 dk P(k) \int_0^\pi \sin \theta d\theta \cos(k.r. \cos(\theta)) \quad (1.20)$$

En effet puisque l'intégrale de la partie réelle (puisque ξ est réel) de $e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}$ revient donc à $\cos \vec{k} \cdot \vec{r} = \cos(kr \cos(\theta))$.

Après calcul de l'intégrale de droite en θ dans 1.20, l'Eq. 1.17 devient dans le cas isotrope :

$$\xi(r) = \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty P(k) \frac{\sin(kr)}{kr} k^2 dk \quad (1.21)$$

r représente une échelle comobile (ou longueur d'onde), correspondante au nombre d'onde k :

$$k = \frac{2\pi}{r} \quad (1.22)$$

Autrement dit, la fonction sinc(kr) agit comme une fonction fenêtre dans le spectre de puissance en ne laissant que les modes de nombre d'onde $k < \frac{2\pi}{r}$ (i.e. les échelles plus grandes que r) contribuer aux fluctuations à l'échelle r .

Pour ces raisons, des fluctuations dont le nombre d'onde serait $k > \frac{2\pi}{r}$ (i.e. les petites échelles) ont une contribution essentiellement nulle à l'échelle r .

La fonction de corrélation à l'échelle r ne sera donc sensible qu'au spectre de puissance correspondant aux échelles $> r$.

■ Commentaires

- Finalement, la fonction de corrélation à deux points permet de remonter directement au $P(k)$.
- Notons que ni le spectre de puissance de la matière ni la fonction de corrélation ne contiennent d'informations sur la phase. Autrement dit, deux distributions peuvent avoir exactement le même spectre de puissance et fonctions de corrélation tout en étant clairement différentes.
- En pratique, il est difficile d'obtenir des données à 3D car cela nécessite la mesure de nombreux redshifts. Un compromis est d'utiliser la fonction de corrélation angulaire à 2D
- Pour fixer les idées et donner un ordre de grandeur, la forme de la $\xi(r)$ mesurée dans le visible (bleu) à partir de la $\xi(r)$ angulaire à 2D et avec des hypothèses provenant des simulations est (Maddox et al., 1990, voir la Fig. 1.3) :

$$\xi(r) = \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-\gamma} \quad (1.23)$$

avec $\gamma \simeq 1.77$ et $r_0 \simeq 5 h^{-1} \text{ Mpc}$, pour des échelles d'environ 0.1 à 10 $h^{-1} \text{ Mpc}$.

- Plus r_0 est grand, plus $\xi(r)$ est grande, i.e. plus l'excès de source est important, i.e. plus le clustering est grand. C'est pour cela que r_0 quantifie le clustering.

On reviendra plus tard sur les observations (Section 1.2.1).

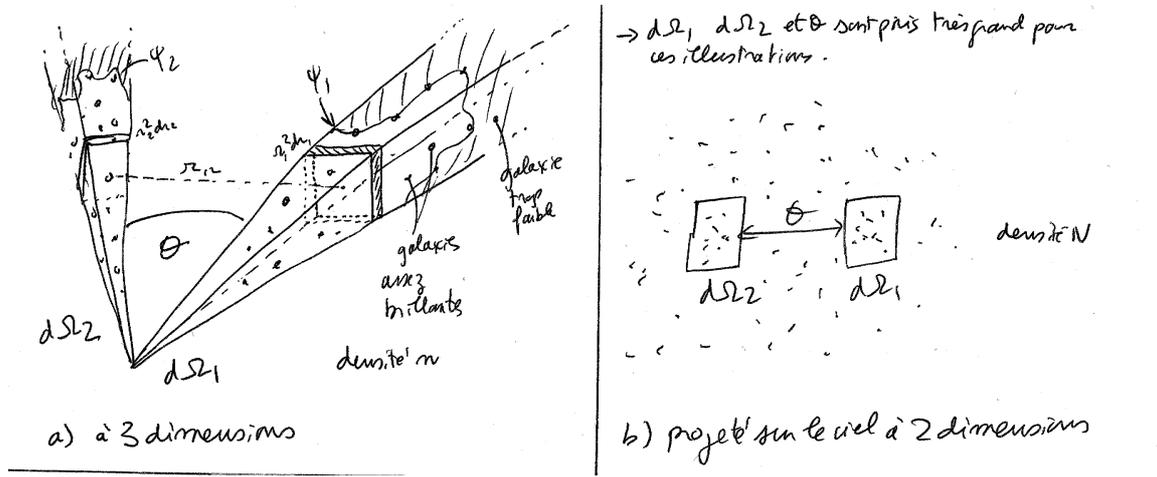


FIG. 1.2 – Illustration du passage de 3D à 2D dans les fonctions de corrélation à 2 points. a) vue à 3D. b) projection à 2D.

■ Passage 3D à 2D.

On peut vouloir réécrire l'équation 1.21 à 2 dimensions (cf Peacock (1999), section 16.2), ce qui donne :

$$\xi(r) = \frac{A}{2\pi^2} \int_0^\infty P(k) J_0(kr) 2\pi k dk \quad (1.24)$$

avec A la surface considérée, et J_0 la fonction de Bessel d'ordre 0.

1.1.4 Fonction de corrélation angulaire

Il est en pratique difficile et/ou coûteux d'obtenir une information en 3D sur les galaxies puisque la mesure des redshifts est très complexe. Un moyen pratique et efficace est de mesurer la corrélation des galaxies à 2 dimension. On utilise alors la **fonction de corrélation angulaire à 2 points** (fca2p).

[Peebles, p216 ; Mellier p39]

■ Par analogie avec l'Eq. 1.2, exprimons la probabilité dP_{2D} d'observer sur la surface du ciel (donc à 2 dimensions) 2 galaxies chacune dans un angle solide $d\Omega_i$ séparées de l'angle θ , étant donnée une densité de surface moyenne de galaxies N (exprimée en sr^{-1}) :

$$dP_{2D} = N^2 d\Omega_1 d\Omega_2 (1 + w(\theta)) \quad (1.25)$$

En regardant la Fig. 1.2, on voit que cette probabilité est reliée à la fonction de corrélation à 2 points (Eq. 1.2) intégrée sur tout l'espace correspondant aux angles solides $d\Omega_1$ et $d\Omega_2$:

$$dP_{2D} = n^2 d\Omega_1 d\Omega_2 \int r_1^2 dr_1 r_2^2 dr_2 (1 + \xi(r_{12})) \psi_1 \psi_2 \quad (1.26)$$

ψ est la fonction de sélection des galaxies, et exprime le fait que les galaxies ne sont pas toutes observables dans une direction donnée, à cause de leur flux apparent trop faible par exemple. Cf Fig. 1.2 pour une illustration.

Ainsi, pour un relevé de galaxies limité en flux (c'est le cas le plus fréquent) avec comme flux limite f_{lim} , on exprime ψ comme comme :

$$\psi_i = \psi \left(\frac{4\pi r_i^2 f_{lim}}{L} \right) \quad (1.27)$$

Si toutes les galaxies avaient la même luminosité (intrinsèque) L , alors il y a une bijection entre f_{lim} et la distance de la galaxie r_i , ce qui donne pour ψ :

$$\begin{cases} \psi_i = 1 \text{ pour } r_i < r_{lim} \\ \psi_i = 0 \text{ pour } r_i > r_{lim} \end{cases} \quad (1.28)$$

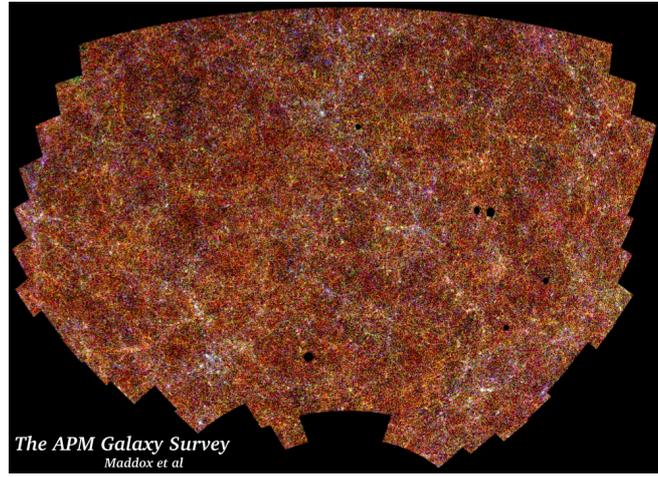


FIG. 1.3 – Le relevé photométrique APM (Maddox et al., 1990). Grâce aux 2 millions de galaxies observées en bleu ($b_j > 20.5$) sur 4300 degrés carrés, la fonction de corrélation angulaire à 2 points a été mesurée pour la première fois sur ces échelles. L'image représente un rectangle d'environ 55×80 degrés carrés. On la mesure maintenant sur tout le ciel (IRAS ou 2MASS en infrarouge) ou sur une fraction plus grande (par exemple 8000 degrés carrés pour le SDSS).

On voit donc qu'il y a un lien clair entre $\xi(r)$ à 3D et $w(\theta)$ à 2D : Eq. 1.25 et 1.26.

■ Explicitons ce lien. La clef réside dans le lien entre n (densité volumique de galaxies) et N (densité surfacique, par unité d'angle solide). Pour l'obtenir, on intègre n par couches dr (pour une unité d'angle solide) :

$$N = \int n \psi r^2 dr \quad (1.29)$$

Réécrivons l'Eq. 1.26 :

$$(1 + w(\theta))N^2 d\Omega_1 d\Omega_2 = n^2 \int r_1^2 dr_1 d\Omega_1 \psi_1 r_2^2 dr_2 d\Omega_2 \psi_2 (1 + \xi(r_{12})) \quad (1.30)$$

$$= N^2 d\Omega_1 d\Omega_2 + n^2 \int r_1^2 dr_1 d\Omega_1 \psi_1 r_2^2 dr_2 d\Omega_2 \psi_2 \xi(r_{12}) \quad (1.31)$$

Les termes en $N^2 d\Omega_1 d\Omega_2$ d'une part, en $d\Omega_1 d\Omega_2$ d'autre part, se simplifient, ce qui donne tout simplement :

$$w(\theta) = \frac{n^2}{N^2} \int r_1^2 dr_1 \psi_1 r_2^2 dr_2 \psi_2 \xi(r_{12}) \quad (1.32)$$

ce qui donne, compte-tenu de la relation entre N et n , donne finalement :

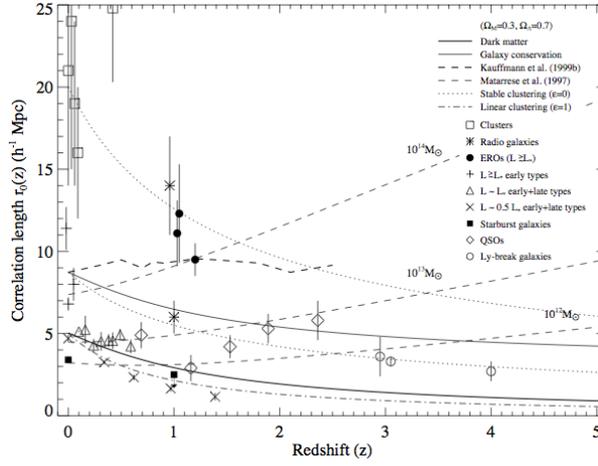
$$w(\theta) = \frac{1}{\left(\int \psi r^2 dr\right)^2} \int r_1^2 r_2^2 dr_1 dr_2 \psi_1 \psi_2 \xi(r_{12}) \quad (1.33)$$

Cette équation, aussi connue sous le nom d'**équation de Limber** (Limber, 1953), relie la fonction de corrélation angulaire à 2 points $w(\theta)$ (2D) à la fonction de corrélation à 2 points $\xi(r)$ (3D).

■ Commentaires

- on peut montrer (Peebles p217, Mellier p39 & p159) que dans le cas où la fonction de corrélation est une loi de puissance, i.e. $\xi(r, z) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\gamma}$ avec $\gamma \sim 1.8$, alors :

$$w(\theta) \propto \left(\frac{4\pi r_0^2 f_{lim}}{L}\right)^{\gamma/2} \quad (1.34)$$

FIG. 1.4 – Evolution de la longueur de corrélation r_0 par Overzier et al. (2003).

- L'Eq. 1.34 signifie que $w(\theta)$ **diminue lorsque la profondeur de l'échantillon augmente**. En effet, l'amplitude de la corrélation à 2D est proportionnelle à $f_{lim}^{\gamma/2}$ (et $\gamma/2 > 0$) : si on diminue f_{lim} (i.e. si on va plus profond en détectant des galaxies plus faibles), alors $w(\theta)$ diminue. La corrélation à 2D est "noyée" plus on ajoute de galaxies.
- En pratique, la fca2p est souvent obtenue en comparant le catalogue réel avec de nombreuses réalisations de catalogues simulés pour estimer l'excès de sources par rapport au poissonien. L'estimateur le plus simple est :

$$w(\theta) = \frac{[DD] - [RR]}{RR} \quad (1.35)$$

où [DD] représente le nombre de paires de galaxie-galaxie (Data-Data), [DR] les paires galaxie-random (Data-Random), et [RR] les paires random-random, toutes ces paires étant mesurées à des distances comprises entre θ et $\theta + d\theta$.

- L'estimateur simple étant peu robuste (échantillons petits, problèmes de bord), on utilise plutôt cet estimateur (Landy & Szalay, 1993) :

$$w(\theta) = \frac{[DD] - 2[DR] + [RR]}{RR} \quad (1.36)$$

- Il existe deux autres moyens statistiques de mesurer la structuration (clustering) : le "count-in-cells" (c-in-c) et le spectre de puissance angulaire C_l (Wall & Jenkins, 2003). Nous reviendrons sur les C_l à propos du CMB.
- Le lien entre fc2p et C_l , avec N la densité moyenne surfacique de sources et P_l le polynôme de Legendre (cf Eq. 2.8) (Peebles, 1993; Wall & Jenkins, 2003) :

$$w(\theta) = \frac{1}{4\pi N^2} \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1) C_l P_l(\cos(\theta)) \quad (1.37)$$

$$C_l = 2\pi N^2 \int_{-1}^{+1} w(\theta) P_l(\cos(\theta)) d\cos(\theta) \quad (1.38)$$

- avantages de la fc2p : facile à calculer, y compris dans des données avec géométrie compliquée ; meilleur aux petits angles (plus sensible au shot noise, i.e. Poisson, à grand θ). Lien direct avec la TF du $P(k)$.

- inconvénients de la fc2p : dépend des fluctuations à toutes les échelles ; sensible au bruit de poisson aux grandes échelles.

- avantages des C_l : points non-corrélés ; meilleur signal à petit l , i.e. grandes échelles (c'est donc très complémentaire de $w(\theta)$). Lien direct avec $P(k)$.

- inconvénients des C_l : plus difficile à calculer.

- Enfin, il existe d'autres estimateurs pour mesurer la structuration (ou agrégation) de la matière (clustering), notamment les fonctions de corrélation à n points (voir Peebles).
- D'autres méthodes existent pour caractériser la distribution de matière lumineuse, en particulier lorsque l'on ne s'intéresse pas aux galaxies détectées individuellement : il s'agit d'étudier les **fluctuations de brillance** des images, car elles sont créées par des galaxies moins lumineuses.

En résumé : $w(\theta)$ + redshifts permet de remonter à $\xi(r)$ qui permet de remonter au $P(k)$.

1.1.5 Biais galaxie-matière

Jusqu'à maintenant, on a implicitement fait l'hypothèse que la matière lumineuse (galaxies) traçait la distribution de matière noire. Or, rien n'est moins certain.

En effet, on observe que le regroupement des amas de galaxies est plus important que celui des galaxies : les amas sont ~ 12 fois plus corrélés que les galaxies. La distribution à grande échelle de la matière n'est donc pas tracée de la même manière par les amas et les galaxies (Meneux et al., 2006), sans savoir quelle population trace le mieux la matière.

Pour établir le lien entre matière visible (galaxies, amas) et matière noire, il convient en effet de comprendre les mécanismes complexes qui, à diverses échelles cosmiques, régulent la formation et l'évolution des structures lumineuses par rapport à la distribution de matière noire sous-jacente. Ces mécanismes s'appuient sur la "microphysique" qui régit comment les baryons tombent, se virialisent, se refroidissent, et forment des étoiles dans les puits de potentiel de matière noire. Comme la compréhension de cette microphysique est loin d'être acquise, les cosmologistes utilisent une approche pragmatique, à l'ordre zéro. Elle consiste à caractériser les fluctuations de matière de manière macroscopique en invoquant un ensemble réduit de quantités fondamentales (typiquement les échelles spatiales et en masse), et à étudier comment leur distribution et leur statistique (agrégation, amplitude de densité) est reliée à l'émission de lumière. Ce schéma de comparaison s'appelle le biais galaxie-matière (Dekel & Lahav, 1999), ou plus simplement le **biais**.

On définit donc le **biais** par le fait qu'il existe une différence entre la distribution spatiale de la matière noire et de la matière lumineuse.

Le plus simple est de considérer un biais linéaire (au sens de sa description mathématique ; ça n'a rien à voir avec la phase linéaire de la croissance des structures ; ici on est déjà dans le régime non-linéaire), indépendant de l'échelle et du redshift :

$$\xi_{gal}(r) = b^2 \xi_{DM}(r) \quad (1.39)$$

avec $\xi_{gal}(r)$ (respectivement $\xi_{DM}(r)$) la fonction de corrélation des galaxies (resp. matière noire).

En utilisant la relation entre la fonction de corrélation et le contraste de densité, on obtient également :

$$\boxed{(\Delta)_{gal} = b (\Delta)_{DM}} \quad (1.40)$$

Enfin, une autre définition fait intervenir la variance du nombre de galaxies dans une sphère de $8h^{-1}$ Mpc par rapport à la variance de la masse :

$$b^2 = \frac{\sigma_8^2(gal)}{\sigma_8^2(masse)} \quad (1.41)$$

L'intérêt de cette définition est que la fonction de corrélation des galaxies $\xi_{gal}(r) \sim 1$ à un rayon de $r = 8h^{-1}$ Mpc

Ces définitions simplistes ne sont pas motivées physiquement. Il est probable que le biais soit en fait une fonction non-linéaire, qui dépend de l'échelle, du temps, et du seuil en masse comme le montrent des simulations numériques et les données. En effet, en reprenant l'exemple des amas et des galaxies, des conditions initiales différentes peuvent expliquer ces différences de biais : les amas ont dû se former où les fluctuations de densité étaient plus importantes, probablement au dessus d'un seuil critique : c'est la théorie des pics (Kaiser, 1984) (Fig. 1.5).

Enfin, on s'attend à ce que le biais dépende :

- du type de galaxie
- de l'échelle
- etc.

Marinoni et al. (2005) (Fig. 1.6) utilisent un biais non-linéaire dépendant de l'échelle et du redshift pour analyser les données du relevé spectroscopique VVDS, et trouvent une évolution significative entre $z = 0$ et $z = 1.5$.

1.2 Contraintes Observationnelles

1.2.1 Relevés de galaxies

Fonction de corrélation angulaire

APM Maddox et al. (1990)

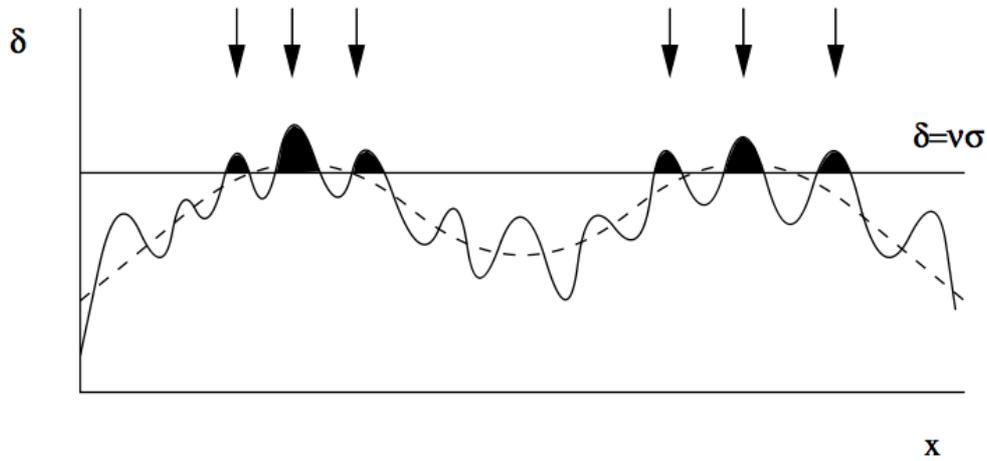


FIG. 1.5 – **Théorie des pics (tiré de Peacock)** : les amas se forment au dessus d'un certain seuil de fluctuation Meneux et al. (2006).

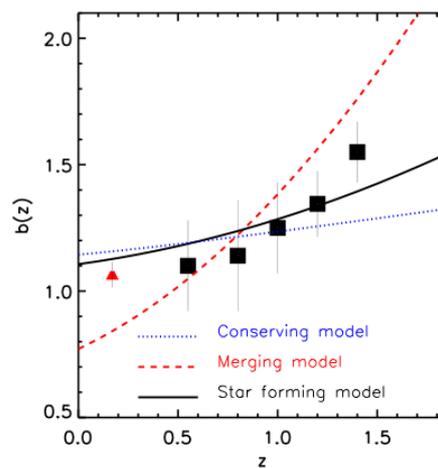


FIG. 1.6 – **Mesure du biais dans le VVDS pour $0 < z < 1.5$** par Marinoni et al. (2005).

Redshifts

$N(z)$

fingers of God

SDSS : DR5 (juin 2006) : 8000 Sq. Deg., 215M objets, 1e6 spectres, 15 Tb de données en lignes (images, catalogues, spectres) <http://www.sdss.org/dr5/>

Fonction de corrélation

Overzier et al. (2003) et sa figure, cf Fig. 1.4

Difficultés

Redshifts difficiles à obtenir ; redshifts photométriques ;

Couverture multi-longueur d'onde : on trace des populations différentes

Montrer : 1- SED typique de qqes galaxies ; 2- l'image Spitzer PR 2004

1.2.2 Oscillations baryoniques

BAO Cole et al. (2005) Eisenstein et al. (2005)

intérêt

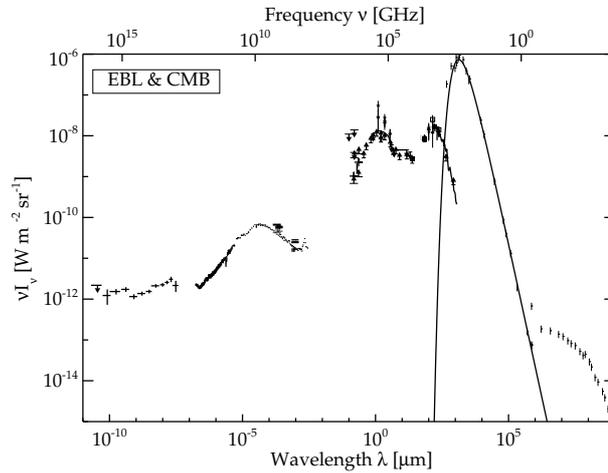


FIG. 1.7 – **Les contributions majeures en rayonnement dans l’Univers** : le fond cosmologique (CMB) et le fond diffus extragalactique, qui s’étend du domaine radio aux rayons γ . Ce graphique représente la brillance du rayonnement extragalactique et cosmologique, qui est proportionnelle à la puissance reçue, en fonction de la longueur d’onde (ou énergie) d’observation (Dole et al. (2006) et Dole, in prep ; voir le site web galaxies IR à l’IAS).

lien avec CMB, énergie noire
difficultés

1.2.3 Rayonnement de fond extragalactique

Le FDE

Toute l’énergie produite après la recombinaison se retrouve dans un rayonnement : le **fond diffus extragalactique** FDE (ou *Extragalactic Background Light* en anglais). Cette énergie a principalement pour origine la nucléosynthèse stellaire et, dans une moindre mesure, l’accrétion. Dans les deux cas, les baryons interviennent sous l’effet de la gravitation. Cependant, les baryons subissent la gravité et sont ainsi sensible aux puits de potentiels de la matière noire.

En résumé, le FDE est le rayonnement résultant de la formation et de l’évolution des galaxies et des étoiles, et ses propriétés dépendent de l’évolution des inhomogénéités, donc de la nature de la matière noire et des paramètres cosmologiques.

Le FDE permet de sonder la formation et l’évolution des galaxies de manière complémentaire aux relevés de galaxies. Ces derniers sont limités à grand redshift ($z \sim 6$ pour les limites actuelles) et sondent l’époque cosmique correspondant à la fin de la réionisation en laissant probablement échapper les signatures des premiers objets, tout en ne détectant qu’une fraction de la population de galaxies à ces redshifts (sélection préférentielle des monstres).

L’étude du FDE permet dans une certaine mesure de contourner cet obstacle, par exemple en mesurant en IR proche les fluctuations de brillance dont l’origine serait dominée par la première génération d’étoile, dites de population III (Kashlinsky, 2005). Cette approche est assez récente (milieu des années 90).

Mesure du spectre de l’Univers

On mesure souvent la **distribution spectrale d’énergie** d’un rayonnement (ou SED pour *Spectral Energy Distribution*), qui diffère de son spectre en ce sens que la SED est une estimation grossière du rayonnement, puisqu’effectuée en bande large (par exemple $\lambda/\Delta\lambda \sim 3$ ou 4) ; le spectre en revanche est mesuré avec un spectromètre (dispositif dispersif) avec une bien meilleure résolution spectrale (par exemple $\lambda/\Delta\lambda \sim 100$ à 10^6).

En mesurant le CMB et le FDE, on dispose d’une “SED de l’Univers” extragalactique et cosmologique. Il est représenté sur la Figure 1.7. En intégrant la brillance des différentes parties du rayonnement, on obtient environ :

- $1000 \text{ nW.m}^{-2}.\text{sr}^{-1}$ pour le CMB qui pique vers 1mm
- $50 \text{ nW.m}^{-2}.\text{sr}^{-1}$ pour le FDE optique (~ 22) et IR (~ 28)

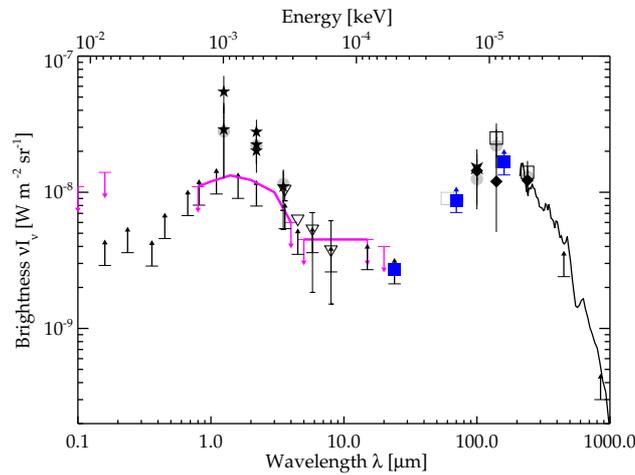


FIG. 1.8 – Le fond diffus extragalactique dans le domaine spectral s'étendant de l'UV au submillimétrique. Le FDE est dominé en énergie par l'infrarouge. Comme pour la figure 1.7, la brillance est tracée en fonction de la longueur d'onde (ou énergie) d'observation (adapté de Dole et al., 2006)

- $<0.5 \text{ nW.m}^{-2}.\text{sr}^{-1}$ pour le FDE dans tous les autres domaines spectraux

Mesure du FDE

Les mesures sont difficile car il existe de nombreux contaminants. Par exemple : dans le visible : absorption par la poussière interstellaire. Dans l'IR : émission d'avant-plan dans notre système solaire (lumière zodiacale) et dans notre Galaxie (poussière). Cependant, en combinant plusieurs techniques (relevés profonds, photométrie absolue avec séparation des composantes, empilement des galaxies) sur des régions du ciel relativement propres pour minimiser les avant-plans.

Les FDE pour le domaine UV-mm est montré en figure 1.8, inspirée de Dole et al. (2006).

Le FDE est caractérisé par 2 pics, l'un IR lointain (max vers $150 \mu\text{m}$) et l'autre dans le visible (max vers $1 \mu\text{m}$). Le pic dans le visible a pour origine l'émission stellaire ; le pic dans l'IR lointain a pour origine l'émission thermique des poussières interstellaires chauffées par... les étoiles.

La SED du FDE est dominée en brillance par la partie IR lointain, ce qui signifie que les processus de formation et d'évolution des galaxies ont engendré la formation de poussière, dont l'émission thermique domine les autres processus d'émission. Pour fixer les idées, ces processus de formation et d'évolution ds galaxies ont engendré, pour 1 photon visible, environ 115 photons IR (Dole et al., 2006).

La partie haute énergie est dominée par les galaxies actives.

Détection des premières étoiles ?

Kashlinsky et al. (2007a,b)

Figure 1.10

Exercice

Supposons que les étoiles de population III ait un spectre dont le maximum se trouve vers $\lambda = 0.11 \mu\text{m}$ de longueur d'onde, comme le montre le modèle de Santos et al. (2002) en Fig. 1.9.

- 1- Quelle est leur température, si l'on considère que le spectre peut s'approximer à celui d'un corps noir ?
 - 2- Les modèles prédisent la formation de ces objets entre $z = 10$ et $z = 20$. A quelles longueurs d'onde vaut-il mieux se placer pour tenter d'observer cette populations III ?
 - 3- Les fluctuations du FDE sont observées par Kashlinsky et al. (2007a) à $\lambda = 3.6 \mu\text{m}$ de longueur d'onde. Croyez-vous en leur interprétation selon laquelle les fluctuations observées sont dominées par les populations III ? Pourquoi ?
 - 4- A quels éléments additionnels songeriez-vous pour étayer cette hypothèse ?
-

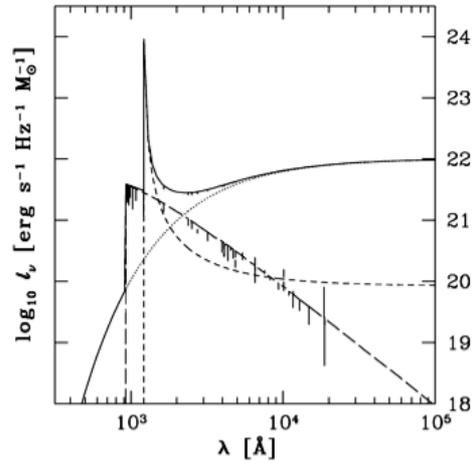


FIG. 1.9 – Spectre simulé d'une étoile de population III (Santos et al., 2002) .

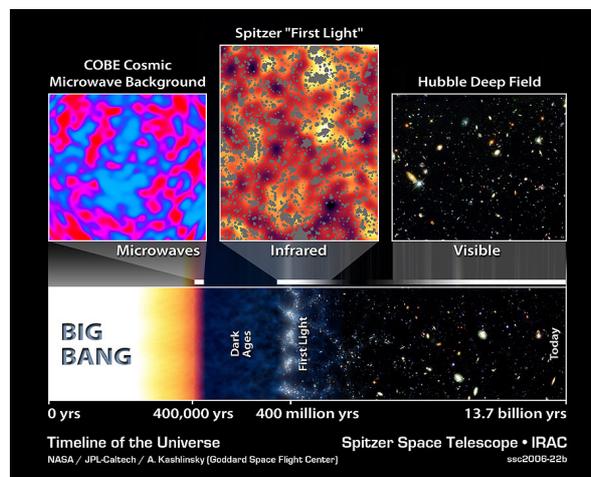


FIG. 1.10 – Illustration grand public de la découverte de fluctuations dans le fond diffus extragalactique proche-IR par Spitzer. Kashlinsky et al. (2007a) ont détecté ces fluctuations et les interprètent comme la signature des premières étoiles (population III). Illustration NASA/SSC.

1.2.4 Simulations

intérêt
limites

1.2.5 le monde merveilleux des galaxies

relevés multi-longueur d'onde
low-z vs high-z galaxies
amas de galaxies, SZ
popIII
reionisation

1.3 Bibliographie spécifique à ce chapitre

Cette partie du cours a largement été inspiré des ouvrages ou documents suivants :

- Galaxy Formation, Longair M., 1998, Springer : chapitres 2.2 et 14
- Measuring our Universe from Galaxy Redshift Surveys, Lahav & Suto, 2004, LRR, 7, 8
<http://www.livingreviews.org/lrr-2004-8>
- Cosmologie, cours de Master 2 d'Astrophysique de Yannick Mellier (IAP), 2004
- The cosmological parameters 2006, Lahav & Liddle, PDG, astro-ph/061168
- BAO : <http://cmb.as.arizona.edu/~eisenste/acousticpeak/>
- Cosmic Infrared Background and Early Galaxy Evolution, Kashlinsky A., 2005, Physics Reports, 409, 361
- The Cosmic Infrared Background resolved by Spitzer, Dole H. et al., 2006, A&A, 451, 417 et aussi
<http://www.ias.u-psud.fr/irgalaxies>

De manière générale, les documents suivants sont aussi une mine d'information pour ce chapitre :

- Principles of Physical Cosmology, P. J. E. Peebles. Princeton University Press, 1993.
- The Large Scale Structure of the Universe, P. J. E. Peebles. Princeton University Press, 1980.
- Cosmological Physics, J. A. Peacock. Cambridge University Press, 1998.
- Modern Cosmology, S. Dodelson. Academic Press (Elsevier), 2003.
- Cosmological inflation and large scale structure, A. R. Liddle & D. H. Lyth. Cambridge University Press, 2000.
- Structure Formation in the Universe, T. Padmanabhan, Cambridge University Press, 1993.

Voir aussi les références globales dans le chapitre bibliographie.

Chapitre 2

L'Univers perturbé : Fond Diffus Cosmologique

Sommaire

2.1	Spectre de puissance des fluctuations sur la sphère : C_l	21
2.1.1	Rappels sur le spectre de puissance	21
2.1.2	Spectre de puissance sur la sphère : C_l	22
2.1.3	A quoi correspond l ?	24
2.1.4	Le spectre de puissance des anisotropies de températures du CMB : description	26
2.1.5	Polarisation du CMB	26
2.2	Observations du fond diffus cosmologique	26
2.2.1	Mesures : T, spectre et fluctuations	26
2.2.2	Stratégies et difficultés	26
2.2.3	Polarisation	27
2.2.4	Qu'apportent toutes ces observations ?	27
2.3	C_l et paramètres cosmologiques	27
2.3.1	C_l et détermination des paramètres cosmologiques	27
2.3.2	CMBEasy	27
2.3.3	Dégénérescences des paramètres cosmologiques	27
2.3.4	Avant-plans ; réionisation	27
2.4	Au delà de la température du CMB : polarisation et autres contraintes	27
2.4.1	Polarisation ; fluctuations en T, E, B	27
2.4.2	Combinaison avec d'autres observations : SN, amas	28
2.5	Bibliographie	28

2.1 Spectre de puissance des fluctuations sur la sphère : C_l

2.1.1 Rappels sur le spectre de puissance

Puissance au sens large : variable au carré. Un SP représente la distribution de la variable au carré en fonction de la fréquence, prise au sens large.

- dans le cas d'une série temporelle, la fréquence a son sens usuel, en Hz
- dans le cas d'un phénomène spatial, la fréquence est spatiale (e.g. k en Mpc^{-1})
- dans le cas d'une image, la fréquence est la fréquence angulaire (e.g. en pixel^{-1} ou arcmin^{-1})
- dans le cas d'un signal angulaire (e.g. sur la sphère), la fréquence est l'harmonique (ou multipole) l (sans dimension, mais qui correspond par exemple à des degrés⁻¹)

Le spectre de puissance du signal x est en général calculé en prenant le module au carré de sa TF. Autre possibilité équivalente : fonction d'autocorrélation.

Spectre de puissance d'un champ gaussien. On voit qu'on perd une information sur la phase du signal x .

On va utiliser pour le CMB (et pour l'EBL) le spectre de puissance sur la sphère C_l .

Discuter : pourquoi C_l et pas $P(k)$

2.1.2 Spectre de puissance sur la sphère : C_l

■ Soit T la température moyenne sur le ciel, et $T(\theta, \phi)$ la température dans une direction spécifique. On observe sur le ciel des anisotropies de température :

$$\frac{T(\theta, \phi) - T}{T} \equiv \frac{\Delta T}{T}(\theta, \phi) \quad (2.1)$$

On voit que la moyenne sur la sphère de $\frac{\Delta T}{T}(\theta, \phi)$ est nulle, et que sa variance nous renseignera sur sa distribution.

On projette les anisotropies de température observées sur la base des harmoniques sphériques :

$$\boxed{\frac{\Delta T}{T}(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=+l} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi)} \quad (2.2)$$

avec la relation d'orthonormalisation des Y_{lm} :

$$\int_{4\pi} Y_{lm}^* Y_{l'm'} d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (2.3)$$

Si on reprend l'Eq. 2.2, que l'on multiplie par Y_{lm}^* et que l'on intègre sur tout les angles solides avec l'Eq. 2.3, on obtient l'expression des a_{lm} :

$$a_{lm} = \int_{4\pi} \frac{\Delta T}{T}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta, \phi) d\Omega \quad (2.4)$$

Les a_{lm} contiennent donc toute l'information relative aux fluctuations de température. Si les a_{lm} sont gaussiens, le spectre de puissance contient toute l'information statistique sur le signal. En effet, dans ce cas $\langle a_{lm} \rangle = 0$ et l'on s'intéresse à la variance des a_{lm} . De même que pour les fluctuations de densité et le $P(k)$, on s'intéresse au spectre de puissance des fluctuations de température, i.e. la distribution par mode, moyennée sur un grand ensemble de réalisations. On va donc s'intéresser à la quantité $\langle a_{lm}^* a_{l'm'} \rangle$ (i.e. la variance). Le problème qui se pose est : comment estimer cette quantité ?

■ Lien entre a_{lm} et C_l

Soit $C(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2)$ la fonction de corrélation à 2 points des fluctuations relatives de températures $\frac{\Delta T}{T}$ prises dans des directions différentes $\vec{\eta}_1 = (\theta_1, \phi_1)$ et $\vec{\eta}_2 = (\theta_2, \phi_2)$ sur la sphère. On a alors :

$$C(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2) = \langle \frac{\Delta T}{T}(\vec{\eta}_1) \frac{\Delta T}{T}(\vec{\eta}_2) \rangle_{Univers} \quad (2.5)$$

la moyenne $\langle \rangle$ étant faite sur plusieurs réalisations d'Univers.

La direction $(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2)$ peut se paramétrer par une seule valeur, leur produit scalaire, i.e. $\cos(\alpha)$, où $\alpha = \angle(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2)$. Ainsi :

$$C(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2) = C(\cos(\alpha)) \quad (2.6)$$

Par ailleurs, la définition de l'autocorrélation C donne :

$$C(\cos(\alpha)) = \sum_{l''} \frac{2l'' + 1}{4\pi} C_{l''} P_{l''}(\cos(\alpha)) \quad (2.7)$$

(cf e.g. Peacock (1999) section 18.1) où $P_{l''}(\cos(\alpha))$ est le polynôme de Legendre :

$$P_{l''}(\cos(\alpha)) = \frac{4\pi}{2l'' + 1} \sum_{m''=-l''}^{m''=l''} Y_{l''m''}^*(\vec{\eta}_1) Y_{l''m''}(\vec{\eta}_2) \quad (2.8)$$

ce qui donne finalement :

$$C(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2) = \sum_{l''} C_{l''} \sum_{m''=-l''}^{m''=+l''} Y_{l''m''}^*(\vec{\eta}_1) Y_{l''m''}(\vec{\eta}_2) \quad (2.9)$$

Le point important est que la fonction d'autocorrélation ne fait intervenir que $C_{l''}$, il n'y a pas de dépendance en m .

Nous pouvons réécrire le produit $\langle \rangle$ moyenné sur plusieurs univers, selon l'Eq. 2.4 :

$$\begin{aligned}
\langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle &= \langle \int d\Omega_1 Y_{lm}(\vec{\eta}_1) \frac{\Delta T}{T}(\vec{\eta}_1) \int d\Omega_2 Y_{l'm'}^*(\vec{\eta}_2) \frac{\Delta T}{T}(\vec{\eta}_2) \rangle \\
&= \int \int d\Omega_1 d\Omega_2 Y_{lm}(\vec{\eta}_1) Y_{l'm'}^*(\vec{\eta}_2) \langle \frac{\Delta T}{T}(\vec{\eta}_1) \frac{\Delta T}{T}(\vec{\eta}_2) \rangle \\
&= \int \int d\Omega_1 d\Omega_2 Y_{lm}(\vec{\eta}_1) Y_{l'm'}^*(\vec{\eta}_2) \langle C(\eta_1, \eta_2) \rangle \\
&= \int \int d\Omega_1 d\Omega_2 Y_{lm}(\vec{\eta}_1) Y_{l'm'}^*(\vec{\eta}_2) \sum_{l''} C_{l''} \sum_{m''=-l''}^{m''=+l''} Y_{l''m''}(\vec{\eta}_1) Y_{l''m''}^*(\vec{\eta}_2)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Or, selon les propriétés des harmoniques sphériques qui forment une base orthogonale de l'espace des fonctions sur la sphère (Eq. 2.3), on obtient :

$$\langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle = \sum_{l''} C_{l''} \sum_{m''=-l''}^{m''=+l''} \delta_{ll''} \delta_{mm''} \delta_{l'l''} \delta_{m'm''} \tag{2.11}$$

ce qui donne finalement :

$$\langle a_{lm}^* a_{l'm'} \rangle = C_l \delta_{ll'} \delta_{mm'} \tag{2.12}$$

autrement dit :

$$\langle a_{lm}^* a_{lm} \rangle = C_l \tag{2.13}$$

■ Construction du spectre de puissance C_l

Cette quantité $\langle a_{lm}^* a_{l'm'} \rangle$ n'est cependant pas utilisable en l'état. La moyenne $\langle . \rangle$ suppose plusieurs réalisations d'univers, ce qui n'est pas observable. En effet, les modèles ne peuvent pas prédire quel endroit précis de l'Univers se trouvera dans un contraste de densité donné ; ils peuvent en revanche prédire la distribution statistique du contraste, moyennée sur plusieurs réalisations.

Il faut donc construire un **estimateur du spectre de puissance** C_l , en remplaçant la moyenne sur les réalisations par une moyenne sur les directions d'observation, et donc sur les m (hypothèse d'ergodicité). (cf thèse N. Ponthieu, p33 et 175). Cet estimateur est construit à partir des $2l + 1$ modes m indépendants pour chaque l :

$$C_l = \langle a_{lm}^* a_{lm} \rangle_m = \langle |a_{lm}|^2 \rangle_m = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{m=+l} |a_{lm}|^2 \tag{2.14}$$

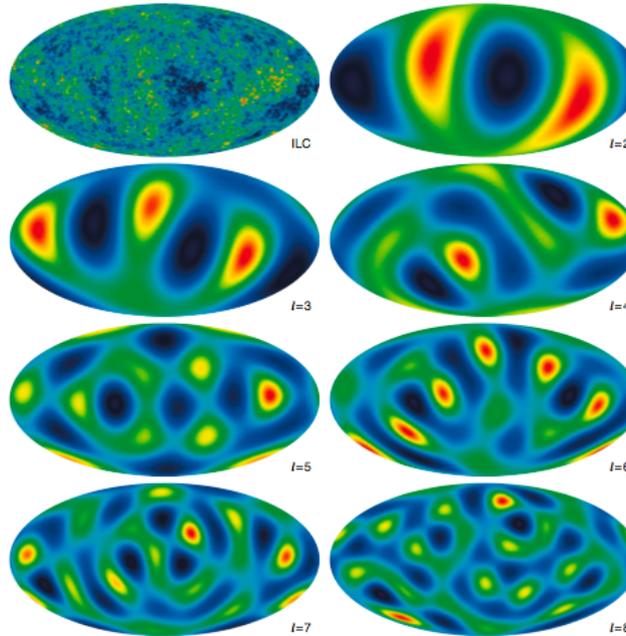


FIG. 2.1 – Carte du ciel des anisotropies de température du CMB. En haut à gauche : tous les l ; ensuite, pour les 8 premiers l . Tiré de Hinshaw et al. (2006)

- Le spectre de puissance des fluctuations de température est représenté en pratique par la quantité

$$\boxed{l(l+1)C_l/2\pi} \quad (2.15)$$

Les raisons sont à la fois historiques et pratiques.

Historiquement, les premières mesures de C_l concernaient les petits l (COBE-DMR). Si on considère un spectre de fluctuations initiales Harrison-Zel'dovich :

$$P(k) = Ak^n \quad n = 1 \quad (2.16)$$

alors on peut montrer que les C_l prennent une forme aux bas l ($l \leq 20$) :

$$C_l = \frac{24\pi}{5} \frac{Q^2}{l(l+1)} \propto \frac{2\pi}{l(l+1)} \quad (2.17)$$

avec Q^2 un facteur de normalisation. En traçant $l(l+1)C_l/2\pi$, le spectre de puissance à bas l doit présenter un plateau. C'est une représentation simple à utiliser.

L'autre raison, plus pratique, est que cette représentation se rapproche d'une **puissance par bande logarithmique**. En effet, la puissance d'un mode est $(2l+1)C_l$. Si l'on veut cette puissance par bande logarithmique, i.e. passer de dl à $d(\ln l) = dl/l$, il faut multiplier par l , ce qui donne : $l(2l+1)C_l$. A grand l , $l(2l+1)C_l \sim l(l+1)C_l$.

Il est donc d'usage dans la littérature de tracer $l(l+1)C_l/2\pi$.

- La variance ΔC_l pour chaque l est donnée par

$$(\Delta C_l)^2 = \frac{2}{2l+1} C_l^2 \quad (2.18)$$

autrement dit :

$$\boxed{\frac{\Delta C_l}{C_l} = \sqrt{\frac{2}{2l+1}}} \quad (2.19)$$

Cette relation relie la **variance cosmique** au multipôle l . Plus l est petit, plus la variance cosmique sera importante (i.e. moins de valeurs de m sont disponibles pour faire la moyenne), en accord avec le fait que nous n'échantillons qu'un seul univers.

- Cross-corrélation.

Jusqu'à maintenant, nous avons étudié l'auto-corrélation du signal X ($X=T$ température par exemple) (Eq. 2.12 et 2.14) qui peut être réécrite abusivement (puisque la somme sur m est implicite) :

$$\langle a_{lm}^{X*} a_{l'm'}^X \rangle = C_l^{XX} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (2.20)$$

On peut vouloir établir le spectre de puissance corrélé de 2 signaux, par exemple la température T et la polarisation E . Le spectre de puissance croisé "TE" se définit alors comme :

$$\langle a_{lm}^{T*} a_{l'm'}^E \rangle = C_l^{TE} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (2.21)$$

- On peut ainsi écrire le développement en harmoniques sphériques du CMB :

$$\boxed{T(\theta, \phi) = (2.725 \pm 0.002K) + (3.358 \pm 0.017mK) \cos(\theta) + \sum_{l \geq 2} \sum_{m=-l}^{m=+l} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi)} \quad (2.22)$$

[Dipole direction : 263.86 ± 0.04 and 48.24 ± 0.10 in galactic polar coordinates.]

La Fig. 2.1 illustre la décomposition en harmoniques sphériques (Hinshaw et al., 2006).

2.1.3 A quoi correspond l ?

- Par analogie avec la TF, la relation entre l'angle θ sur la sphère et le multipôle l est la suivante :

$$l \sim \frac{\pi}{\theta} \sim \frac{180}{\theta(\text{degrés})} \quad (2.23)$$

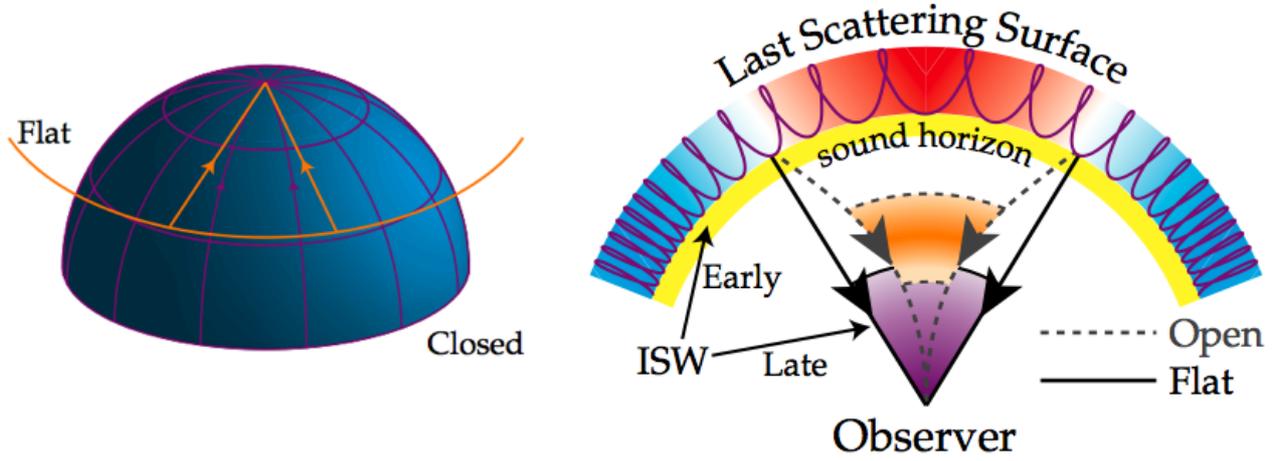


FIG. 2.2 – Illustration de la distance angulaire D_A en fonction de la géométrie. Tiré de Hu et al. (1997).

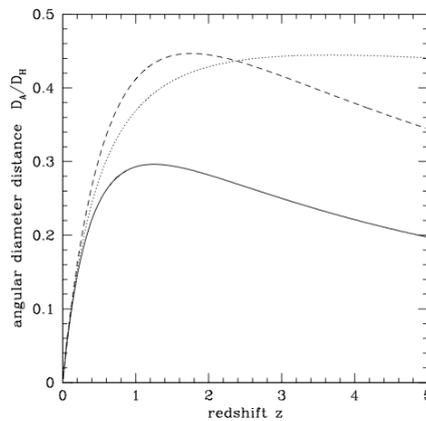


Figure 2: The dimensionless angular diameter distance D_A/D_H . The three curves are for the three world models, $(\Omega_M, \Omega_\Lambda) = (1, 0)$, solid; $(0.05, 0)$, dotted; and $(0.2, 0.8)$, dashed.

FIG. 2.3 – Evolution de D_A en fonction du redshift (et de la cosmologie). Tiré de Hogg (2000).

l correspond donc à une taille angulaire sur la sphère. Le monopôle correspond à $l = 0$, le dipôle $l = 1$ etc... Cf Fig. 2.1 pour les multipôles de $l = 2$ à 8.

■ Relation entre l'angle et l'échelle physique : **la distance angulaire**. Cette distance angulaire correspond au rapport entre la distance physique transverse d'un objet situé à z et l'angle sous lequel il est vu.

La Fig. 2.2 illustre sa dépendance en fonction de la géométrie, et la Fig. 2.3 en fonction du redshift et de la cosmologie.

On définit $E(z)$ qui caractérise l'évolution de l'Univers [un astronome situé au redshift z mesurerait $H(z) = H_0 E(z)$]:

$$E(z) \equiv \sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_\Lambda} \quad (2.24)$$

En fait $dz/E(z)$ est le temps de vol d'un photon qui parcourt l'intervalle dz au redshift z .

En intégrant, on obtient la distance comobile D_C :

$$D_C \equiv D_H \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \quad (2.25)$$

$$D_M = \begin{cases} D_H \frac{1}{\sqrt{\Omega_k}} \sinh(\sqrt{\Omega_k} D_C / D_H) & \text{pour } \Omega_k > 0 \text{ (ouvert)} \\ D_C & \text{pour } \Omega_k = 0 \text{ (plat)} \\ D_H \frac{1}{\sqrt{\Omega_k}} \sin(\sqrt{|\Omega_k|} D_C / D_H) & \text{pour } \Omega_k > 0 \text{ (fermé)} \end{cases} \quad (2.26)$$

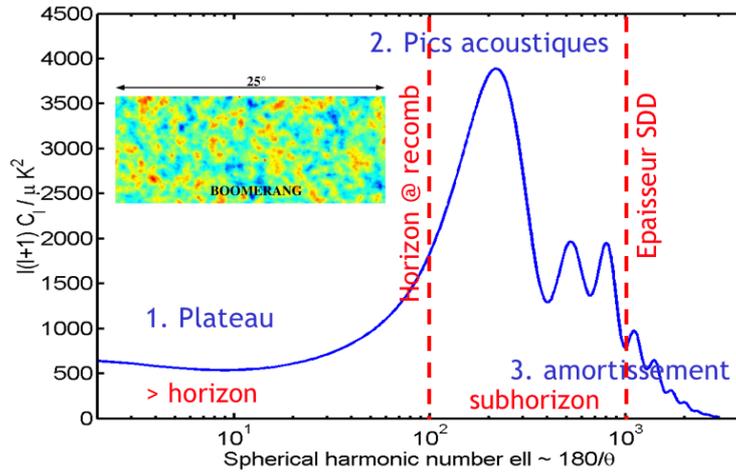


FIG. 2.4 – **Illustration des 3 régimes dans le spectre de puissance des fluctuations de température du CMB** C_l . Le plateau, les pics acoustiques, l'amortissement. En insert, image des fluctuations observées en 1999 par le ballon BOOMERANG (De Bernardis et al., 2000) : on voit que l'essentiel de l'énergie se trouve dans des fluctuations aux échelles assez petites (~ 1 degré), ce qui explique le 1er pic acoustique vers $l \sim 200$ correspondant à un angle de 1 degré. (adapté de S. Bridle).

et finalement :

$$D_A = \frac{D_M}{1+z} \quad (2.27)$$

■ L'horizon à $z \sim 1000$ correspond à une taille de l'ordre de 1° soit $l \sim 200$.

Exercice (simple)

Tracer schématiquement le spectre de puissance d'un ciel avec des bulles de 3 diamètres : 10 degrés, 1 degré et 0.1 degré.

2.1.4 Le spectre de puissance des anisotropies de températures du CMB : description

La Fig. 2.4 illustre les 3 principaux régimes.

plateau

pics acoustiques : maximum de compression au découplage

anisotropies 2ndaires et atténuation

[e.g. Rich p312 ; Longair chap 15 ; Dodelson section 8.5 ;]

2.1.5 Polarisation du CMB

CF slides - courtesy N. Ponthieu.

2.2 Observations du fond diffus cosmologique

2.2.1 Mesures : T, spectre et fluctuations

2.2.2 Stratégies et difficultés

sol/ballon/espace ;

détecteurs ;

surface vs profondeur ;

petits/grands l .

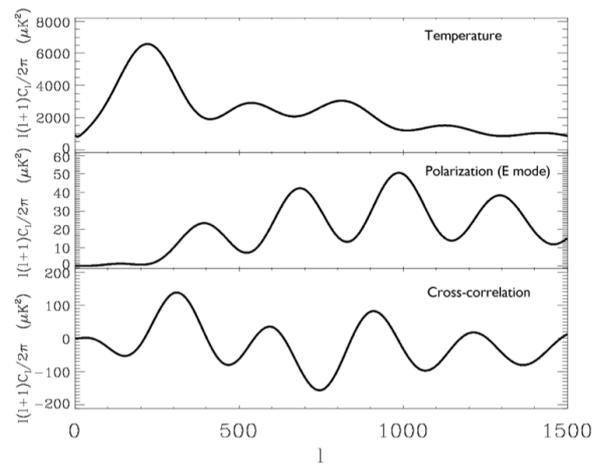


FIG. 2.5 – Illustration des spectres de puissance TT (haut), EE (milieu) et TE (bas) (Balbi et al., 2006). Remarquer le déphasage de π entre TT et EE, et de $\pi/2$ avec TE.

2.2.3 Polarisation

dire qu'il existe E, B
observations & difficultés

$$\tau = \int_0^{z_i} \sigma_T n_e(z) \frac{dt}{dz} dz \quad (2.28)$$

2.2.4 Qu'apportent toutes ces observations ?

Mathieu
cf aussi Naselsky et al. (2006) Hu & White (1997); Hu et al. (1997); Hu & Dodelson (2002)

2.3 C_l et paramètres cosmologiques

2.3.1 C_l et détermination des paramètres cosmologiques

2.3.2 CMBEasy

Démonstration avec CMBEasy pour illustrer les C_l et leur dépendance : DM, BM, photons, paramètres cosmologiques.

2.3.3 Dégénérescences des paramètres cosmologiques

essentielle, instrumentale, intégrale.

2.3.4 Avant-plans ; réionisation

2.4 Au delà de la température du CMB : polarisation et autres contraintes

2.4.1 Polarisation ; fluctuations en T, E, B

formalisme
intérêt
Dodelson section 10.5

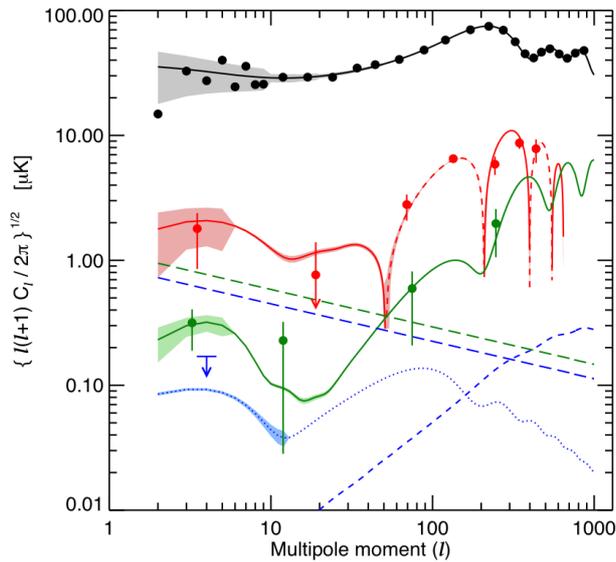


FIG. 2.6 – Spectres de puissance mesurés par WMAP 3 (Page et al., 2006). De haut en bas : TT, TE, EE, et valeur supérieure sur BB.

2.4.2 Combinaison avec d'autres observations : SN, amas

2.5 Bibliographie

Cette partie du cours a largement été inspiré des ouvrages et documents suivants :

- The CMB Polarization : status and prospects, 2006, Balbi, Natoli, Vittorio, astro-ph/0606511
- Cosmic Microwave Background Mini-Review, 2006, Scott & Smoot, PDG, astro-ph/0601307
- The cosmological parameters 2006, Lahav & Liddle, PDG, astro-ph/061168
- Cosmic Microwave Background Anisotropies, 2002, Hu & Dodelson, ARAA
- Polarisation du fond diffus cosmologique et de l'émission des poussières Galactiques, 2003, N. Ponthieu, thèse, UJF Grenoble
- Resource Letter : TACMB-1 : The theory of anisotropies in the cosmic microwave background, 2002, White & Cohn, Am. J. Phys (White & Cohn, 2002)
- cours de Jim Rich
- et surtout : nombreuses discussions et calculs avec M. Langer, N. Ponthieu, M. Douspis.

Voir aussi les références globales dans le chapitre bibliographie.

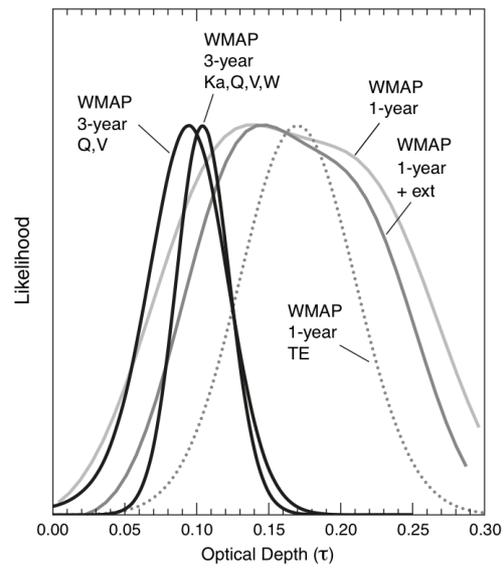


FIG. 2.7 – Estimation de τ par WMAP 1 et 3 (Page et al., 2006). Constaté l'évolution de l'estimation entre WMAP1 et WMAP3. La valeur actuelle se situe autour de $\tau \sim 0.10$. Les premières estimations de $\tau \sim 0.17$ laissèrent sceptiques beaucoup de chercheurs.

Chapitre 3

Fond diffus cosmologique pour L2 : quelques notes

Sommaire

3.1	Contexte	31
3.2	Historique de la détection du CMB	31

3.1 Contexte

Les modèles de big band prédisent une phase chaude et dense dans le passé, mais également une phase **d'équilibre**. Dès les années 1948, un rayonnement de corps noir de l'Univers a été prédit.

Il y a une coupure dans l'histoire de l'Univers lorsque la température atteint ~ 3000 K.

Au dessus de cette température, il existe beaucoup trop de photons ionisants qui ionisent la matière, en particulier H (p et e-) : en effet, avec $\sim 10^9$ photons pour 1 seul baryon, même si la majorité des photons n'a pas d'énergie suffisante pour ioniser H (car il faut 13.6 eV alors que $3000\text{K} \rightarrow \sim 0.3\text{eV}$), la queue de distribution à haute énergie des photons suffit à ioniser significativement le milieu.

Sinon on s'attendrait à ce que la température soit de 160000 K, car à cette température la majorité des photons a une énergie de 13.6 eV.

Par exemple, à 5000K $H^+/H = 99\%$, alors qu'à 300K, $H^+/H = 1\%$.

Ainsi, pour $T > 3000$ K, le milieu est ionisé et les photons sont constamment absorbés et rémis : leur libre parcours moyen est très faible. L'Univers est alors **opaque au rayonnement**. Il n'y a aucune structure dans cet univers, composé seulement de protons libres, e- libres, noyaux d'Helium (et Li), et photons.

Vers 3000K cependant, du fait que l'Univers devient neutre, le libre parcours moyen des photons se trouve subitement quasiment infini : l'Univers devient **transparent au rayonnement**.

3.2 Historique de la détection du CMB

- 1938 : identification de la raie de CN dans le milieu interstellaire par A.N Adam. Sa température d'excitation est de 2.3K. Il existe donc un mécanisme excitateur. La solution proposée à l'époque : les collisions.
- 1965 : Arno Penzias & Robert Wilson détectent le CMB à 7cm dans le New Jersey. Prix Nobel 1978 pour cette découverte. Dicke, Peebles, Roll & Wilkinson dans le même numéro de ApJ donnent l'interprétation du CMB.
- Années 70 et 80 : fusées et ballons.
- 1989 : le satellite COBE, avec l'instrument FIRAS, mesure le spectre du CMB avec une précision inégalée : le corps noir est confirmé à 10^{-3} près. COBE mesure $T = 2.725 \pm 0.002\text{K}$. Prix Nobel 2006 pour cette mesure (John Mather, GSFC).
- 1992 : COBE (avec DMR) détecte les fluctuations du CMB. Prix Nobel 2006 pour cette découverte (George Smoot, UC Berkeley).
- 1995 - 2000 : des expériences ballons (Boomerang, Maxima), et au sol (radio) étudient les fluctuations du CMB à petite échelle.
- 2001 : le ballon français (CNES) Archeops et le satellite WMAP, plus sensible que COBE, détecte et caractérise les fluctuations du CMB.

- 2003 : WMAP donne des mesures encore plus précises après 3 ans d'observation.
- 2008 : lancement de Planck

Bibliographie

- Balbi, A., Natoli, P. & Vittorio, N. The cmb polarization : status and prospects, 2006.
- Cole, S., Percival, W. J., Peacock, J. A., Norberg, P., Baugh, C. M., Frenk, C. S., Baldry, I., Bland-Hawthorn, J., Bridges, T., Cannon, R., Colless, M., Collins, C., Couch, W., Cross, N. J. G., Dalton, G., Eke, V. R., De Propris, R., Driver, S. P., Efstathiou, G., Ellis, R. S., Glazebrook, K., Jackson, C., Jenkins, A., Lahav, O., Lewis, I., Lumsden, S., Maddox, S., Madgwick, D., Peterson, B. A., Sutherland, W. & Taylor, K. *The 2df galaxy redshift survey : power-spectrum analysis of the final data set and cosmological implications*, 2005, MNRAS, **362**, 505–534.
- De Bernardis, P., Ade, P. A. R., Bock, J. J., Bond, J. R., Borrill, J., Boscaleri, A., Coble, K., Crill, B. P., De Gasperis, G., Farese, P. C., Ferreira, P. G., Ganga, K., Giacometti, M., Hivon, E., Hristov, V. V., Iacoangeli, A., Jaffe, A. H., Lange, A. E., Martinis, L., Masi, S., Mason, P. V., Mauskopf, P. D., Melchiorri, A., Miglio, L., Montroy, T., Netterfield, C. B., Pascale, E., Piacentini, F., Pogosyan, D., Prunet, S., Rao, S., Romeo, G., Ruhl, J. E., Scaramuzzi, F., Sforna, D. & Vittorio, N. *A flat universe from high-resolution maps of the cosmic microwave background radiation*, 2000, Nature, **404**, 955–959.
- Dekel, A. & Lahav, O. *Stochastic nonlinear galaxy biasing*, 1999, ApJ, **520**, 24–34.
- Dole, H., Lagache, G., Puget, J. L., Caputi, K. I., Fernández-Conde, N., Le Floc’h, E., Papovich, C., Pérez-González, P. G., Rieke, G. H. & Blaylock, M. *The cosmic infrared background resolved by spitzer. contributions of mid-infrared galaxies to the far-infrared background*, 2006, A&A, **451**, 417.
- Eisenstein, D. J., Zehavi, I., Hogg, D. W., Scoccimarro, R., Blanton, M. R., Nichol, R. C., Scranton, R., Seo, H. J., Tegmark, M., Zheng, Z., Anderson, S. F., Annis, J., Bahcall, N., Brinkmann, J., Burles, S., Castander, F. J., Connolly, A., Csabai, I., Doi, M., Fukugita, M., Frieman, J. A., Glazebrook, K., Gunn, J. E., Hendry, J. S., Hennessy, G., Ivezia, Z., Kent, S., Knapp, G. R., Lin, H., Loh, Y. S., Lupton, R. H., Margon, B., McKay, T. A., Meiksin, A., Munn, J. A., Pope, A., Richmond, M. W., Schlegel, D., Schneider, D. P., Shimasaku, K., Stoughton, C., Strauss, M. A., Subbarao, M., Szalay, A. S., Szapudi, I. A., Tucker, D. L., Yanny, B. & York, D. G. *Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of sdss luminous red galaxies*, 2005, ApJ, **633**, 560–574.
- Hinshaw, G., Nolta, M. R., Bennett, C. L., Bean, R., Doré, O., Greason, M. R., Halpern, M., Hill, R. S., Jarosik, N., Kogut, A., Komatsu, E., Limon, M., Odegard, N., Meyer, S. S., Page, L., Peiris, H. V., Spergel, D. N., Tucker, G. S., Verde, L., Weiland, J. L., Wollack, E. & Wright, E. L. *Three-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations : Temperature analysis*, 2006.
- Hogg, D. W. *Distance measures in cosmology*. astro-ph/9905116, 2000.
- Hu, W. & Dodelson, S. *Cosmic microwave background anisotropies*, 2002, ARA&A, **40**, 171–216.
- Hu, W. & White, M. *A cmb polarization primer*, 1997, New Astronomy Reviews, **2**, 323–344.
- Hu, W., Sugiyama, N. & Silk, J. *The physics of microwave background anisotropies*, 1997, Nature, **386**, 37–43.
- Kaiser, N. *On the spatial correlations of abell clusters*, 1984, ApJ, **284**, L9–L12.
- Kashlinsky, A., Arendt, R. G., Mather, J. & Moseley, S. H. *New measurements of cosmic infrared background fluctuations from early epochs*, 2007a, ApJ, **654**, L5–L8.
- Kashlinsky, A., Arendt, R. G., Mather, J. & Moseley, S. H. *On the nature of the sources of the cosmic infrared background*, 2007b, ApJ, **654**, L1–L4.
- Kashlinsky, A. *Cosmic infrared background and early galaxy evolution [review article]*, 2005, Phys. Rep., **409**, 361.

- Landy, S. D. & Szalay, A. S. *Bias and variance of angular correlation functions*, 1993, ApJ, **412**, 64.
- Limber, D. N. *The analysis of counts of the extragalactic nebulae in terms of a fluctuating density field.*, 1953, ApJ, **117**, 134.
- Maddox, S. J., Efstathiou, G., Sutherland, W. J. & Loveday, J. *Galaxy correlations on large scales*, 1990, MNRAS, **242**, 43.
- Marinoni, C., Le Fevre, O., Meneux, B., Iovino, A., Pollo, A., Ilbert, O., Zamorani, G., Guzzo, L., Mazure, A., Scaramella, R., Cappi, A., McCracken, H. J., Bottini, D., Garilli, B., Le Brun, V., Maccagni, D., Picat, J. P., Scoddeggio, M., Tresse, L., Vettolani, G., Zanichelli, A., Adami, C., Arnouts, S., Bardelli, S., Blaizot, J., Bolzonella, M., Charlot, S., Ciliegi, P., Contini, T., Foucaud, S., Franzetti, P., Gavignaud, I., Marano, B., Mathez, G., Merighi, R., Paltani, S., Pello, R., Pozzetti, L., Radovich, M., Zucca, E., Bondi, M., Bongiorno, A., Busarello, G., Colombi, S., Cucciati, O., Lamareille, F., Mellier, Y., Merluzzi, P., Ripepi, V. & Rizzo, D. *The vimos vlt deep survey. evolution of the non-linear galaxy bias up to $z = 1.5$* , 2005, A&A, **442**, 801–825.
- Meneux, B., Le Fevre, O., Guzzo, L., Pollo, A., Cappi, A., Ilbert, O., Iovino, A., Marinoni, C., McCracken, H. J., Bottini, D., Garilli, B., Le Brun, V., Maccagni, D., Picat, J. P., Scaramella, R., Scoddeggio, M., Tresse, L., Vettolani, G., Zanichelli, A., Adami, C., Arnouts, S., Arnaboldi, M., Bardelli, S., Bolzonella, M., Charlot, S., Ciliegi, P., Contini, T., Foucaud, S., Franzetti, P., Gavignaud, I., Marano, B., Mazure, A., Merighi, R., Paltani, S., Pello, R., Pozzetti, L., Radovich, M., Zamorani, G., Zucca, E., Bondi, M., Bongiorno, A., Busarello, G., Cucciati, O., Gregorini, L., Lamareille, F., Mathez, G., Mellier, Y., Merluzzi, P., Ripepi, V. & Rizzo, D. *The vimos-vlt deep survey. the evolution of galaxy clustering per spectral type to $z = 1.5$* , 2006, A&A, **452**, 387–395.
- Naselsky, P. D., Novikov, D. I. & Novikov, I. D. 2006, *The Physics of the Cosmic Microwave Background*. Cambridge.
- Overzier, R. A., Rottgering, H. J. A., Rengelink, R. B. & Wilman, R. J. *The spatial clustering of radio sources in nsss and first ; implications for galaxy clustering evolution*, 2003, A&A, **405**, 53–72.
- Page, L., Hinshaw, G., Komatsu, E., Nolta, M. R., Spergel, D. N., Bennett, C. L., Barnes, C., Bean, R., Doré, O., Halpern, M., Hill, R. S., Jarosik, N., Kogut, A., Limon, M., Meyer, S. S., Odegard, N., Peiris, H. V., Tucker, G. S., Verde, L., Weiland, J. L., Wollack, E. & Wright, E. L. *Three year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations : Polarization analysis*, 2006.
- Peacock, J. A. 1999, *Cosmological Physics*. Cambridge.
- Peebles, P. J. E. 1993, *Principles of physical cosmology*. Princeton Series in Physics.
- Santos, M. R., Bromm, V. & Kamionkowski, M. *The contribution of the first stars to the cosmic infrared background*, 2002, MNRAS, **336**, 1082–1092.
- Wall, J. V. & Jenkins, C. R. 2003, *Practical Statistics for Astronomers*. Cambridge.
- White, M. & Cohn, J. D. *The theory of anisotropies in the cosmic microwave background*, 2002, American Journal of Physics, **70**, 106.